



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**LUIZ ARNALDO DA SILVA LUZ**

**UMA PROPOSTA PARA A PRECISÃO POSICIONAL NO  
CADASTRO URBANO BRASILEIRO**

**FLORIANÓPOLIS, 2013**





**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC  
CENTRO TECNOLÓGICO - CTC  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**LUIZ ARNALDO DA SILVA LUZ**

**UMA PROPOSTA PARA A PRECISÃO POSICIONAL NO  
CADASTRO URBANO BRASILEIRO**

Dissertação de mestrado submetida a Universidade Federal de Santa Catarina como requisito exigido pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, para obtenção do Título de MESTRE em Engenharia Civil.

**ORIENTADOR:** PROF. DR.  
ING. JÜRGEN WILHELM  
PHILIPS

FIORIANÓPOLIS, 2013.

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

LUZ, LUIZ ARNALDO  
UMA PROPOSTA PARA A PRECISÃO POSICIONAL NO CADASTRO  
URBANO BRASILEIRO / LUIZ ARNALDO LUZ ; orientador, Jürgen  
Philips - Florianópolis, SC, 2013.  
82 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil.

Inclui referências

1. Engenharia Civil. 2. CADASTRO. 3. ERRO. 4. PRECISÃO  
POSICIONAL. I. Philips, Jürgen. II. Universidade Federal de  
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Civil. III. Título.

# **UMA PROPOSTA PARA A PRECISÃO POSICIONAL NO CADASTRO URBANO BRASILEIRO**

**LUIZ ARNALDO DA SILVA LUZ**

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de “Mestre em Engenharia Civil”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFSC.

Florianópolis, 12 de Setembro 2013

---

Prof. Dr. Roberto Caldas de Andrade Pinto – Coordenador do PPGEC

---

Prof. Dr.- Ing. Jürgen Wilhelm Philips – Orientador PPGEC/UFSC

## **BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Dalto Rodrigues - CCE/UFV

---

Prof. Dr. Francisco Henrique de Oliveira - PPGEC/UFSC

---

Prof. Dr. Jucilei Cordini - ECV/UFSC



*À Deus, por guiar meus passos, e conceder-me todas as bênçãos da  
minha vida.*

*Aos meus pais, Andrino e Maurilia, por terem dado o melhor de si em  
minha formação.*

*À minha esposa Luciana e meus filhos Vinicius, Marcus e Anita pela  
compreensão e confiança em meu trabalho.*

*À minha irmã Ana Paula por sempre apoiar-me nos momentos mais  
difíceis.*

*Aos amigos que sempre estiveram presentes em minha vida.*





## **AGRADECIMENTOS**

Dedico meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para o desenvolvimento deste trabalho, em especial:

À Deus por estar presente em todos os momentos da minha vida e a minha família por acreditar e incentivar minha escolha;

À Universidade Federal de Santa Catarina, mantenedora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil;

Ao Prof. Dr. - Ing. Jürgen Philips, pela paciência, incentivo, sugestões e orientação;

Ao Sr. Hélio W. Coelho e Sra. Maria Salete Duarte Coelho diretores do Colégio Dom Jaime Câmara pela amizade, apoio, incentivo e aprendizado na carreira docente.

Ao prof. Leocádio Arnaldo Grilo Cúneo diretor administrativo e de planejamento da Faculdade Energia de Administração e Negócios por acreditar e incentivar meu trabalho;

A todos os professores do PPGEC que contribuíram significativamente para a minha formação acadêmica, e funcionários que sempre estavam dispostos a me ajudar;

A todos os amigos do Curso e Colégio Energia pelas palavras de apoio e incentivo.



## RESUMO

O Código Civil Brasileiro em vigor estabelece para todos os imóveis do país um erro máximo de 5 % para a indicação de áreas em contratos de compra e venda. Para os imóveis rurais existe desde 2001 uma “lei de georreferenciamento” exigindo que um erro nos vértices dos imóveis não exceda o limite de 50 centímetros. Com essa medida o Brasil deu mais um passo importante na direção para um cadastro territorial moderno, ainda limitado à esfera rural. Na área urbana, apesar do Código Civil regulamentar a precisão para a área de todos os imóveis urbanos, nunca foi estabelecida uma precisão específica para as coordenadas dos pontos limites dos imóveis urbanos. Esta pesquisa tem por finalidade encontrar uma relação formal entre a precisão especificada na legislação, a área do imóvel e as coordenadas dos seus limites. Para tanto foram abordadas, por simulação, uma série de situações relativas à geometria e ao número de vértices dos imóveis analisados, utilizando o cálculo de áreas pelo método de Gauss e a lei de propagação das variâncias. Desta pesquisa foi derivada uma proposta de precisão posicional, para os imóveis urbanos, compatível com o atual Código Civil Brasileiro e em defesa dos interesses dos proprietários na identificação dos imóveis.

**Palavras Chave:** CADASTRO, ERRO, PRECISÃO POSICIONAL.



## ABSTRACT

The Brazilian Civil Code in force establishes for all properties in the country a maximum error of 5% for the indication of areas of purchase and sale contracts.

Since 2001 the law of “Georeferencing” requires the error at the vertices of a rural property not to exceed 50cm. With this measure, Brazil has taken another important step in the direction for modern land registry, but it is still limited to the rural sphere.

In urban areas, although the Civil Code regulates the precision for the area of all urban properties, never a specific accuracy was established for the coordinates of the limit points of urban real estate.

This research aims to find a formal relationship between the precision specified by law, the area of the property and its coordinates.

With this in mind, by simulation, a number of situations relating to geometry and number of vertices of the analyzed properties, using the calculation of areas by the Gauss law and the propagation of variances.

A proposal was derived from this research for the positional accuracy for urban properties, consistent with the current legislation of the Civil Code and in the interests of the identified property owners.

**Key Words:** Registry, Error, Positional accuracy.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esquema das coordenadas para o cálculo da área.....	26
Figura 2 - Cálculo de áreas.....	27
Figura 3 - Projeção dos vértices 1, 2 e 4 sobre o eixo dos y.....	28
Figura 4 - Projeção dos vértices 2, 3 e 4 sobre o eixo dos y.....	29
Figura 5 - Quatro situações distintas de medições em uma base de calibração.....	33
Figura 6 - Probabilidade de erros absolutos menores que $\Delta$ .....	35
Figura 7 - Probabilidades associadas com uma distribuição normal..	36
Figura 8 - Distribuição gaussiana.....	40
Figura 9 - Representação gráfica - Polígono de 4 vértices .....	51
Figura 10 - Representação gráfica - Polígono de 6 vértices .....	54
Figura 11 - Representação gráfica - Polígono de 8 vértices .....	56
Figura 12 - Área total.....	58
Figura 13 - Quadro de áreas.....	59
Figura 14 - Área 1.....	60
Figura 15 - Área 2.....	62
Figura 16 - Área 3.....	64
Figura 17 - Área 4.....	65
Figura 18 - Área 5.....	67
Figura 19 - Diagrama de dispersão: PRECISÃO POSICIONAL x ÁREA DAS PARCELAS .....	69
Figura 20 - Diagrama de dispersão: PRECISÃO POSICIONAL x Nº VÉRTICES DAS PARCELAS.....	70
Figura 21 - Diagrama de dispersão: PRECISÃO POSICIONAL x FRENTE DA PARCELA COM 4 VÉRTICES E 500 m <sup>2</sup> DE ÁREA.....	72
Figura 22 - Diagrama de dispersão: PRECISÃO POSICIONAL x FRENTE DA PARCELA COM 4 VÉRTICES E 2 ha DE ÁREA.....	74
Figura 23: Representação gráfica da parcela com frente de 30 metros.....	75
Figura 24-Vista aérea de uma quadra da Avenida Beira Mar Norte..	78
Figura 25 - Planta cadastral de uma quadra da Avenida Beira Mar Norte.....	78

Figura 26 - Representação Gráfica de um terreno na Avenida Beira Mar Norte.....	79
--	----



## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Intervalos de confiança para incertezas e correspondentes níveis de confiança, no caso de distribuições gaussianas para os erros.....	39
Quadro 2 - Tolerância e precisão posicional em função do número de vértices para parcelas de forma retangular, frente de 5 metros e $125\text{m}^2$ de área.....	58
Quadro 3 - Área, número de vértices, tolerância posicional e precisão posicional.....	69
Quadro 4 - Simulação da precisão posicional em função da variação dos lados para parcelas com 4 vértices e $500\text{m}^2$ de área.....	72
Quadro 5 - Simulação da precisão posicional em função da variação dos lados para parcelas com 4 vértices e 2 ha de área.....	73
Quadro 6 - Valores do $\text{m}^2$ , por bairros. Imóvel: Residencial multifamiliares.....	79



## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	21
1.1. Objetivo Geral.....	21
1.1.2. Objetivos Específicos.....	21
1.2. Justificativa.....	22
2. REVISÃO DE LITERATURA.....	23
2.1. Cadastro.....	23
2.1.1. Cadastro no Brasil.....	23
2.1.2. A precisão no cadastro brasileiro.....	24
2.2. Cálculo da área superficial.....	25
2.3. Teoria dos erros.....	30
2.3.1. Medição.....	30
2.3.2. Resultado de uma medição.....	31
2.3.3. Erros e incertezas.....	31
2.3.4. Tipos de erros.....	32
2.3.5. Distribuição Normal ou Gaussiana.....	33
2.3.6. Precisão e exatidão.....	34
2.3.7. Como determinar a incerteza de uma medição.....	37
2.3.8. Lei de propagação das variâncias.....	40
2.3.9. Método dos mínimos quadrados.....	42
3. MATERIAIS E MÉTODO.....	47
3.1. Materiais Utilizados.....	47
3.1.1 Dissertações e Teses.....	47
3.1.2 Documentos Legais.....	47
3.1.3 Normas Técnicas.....	47
3.1.4 Softwares Utilizados.....	48
3.2. Método.....	48
3.2.1. Metodologia proposta.....	48
3.2.2. Apresentação do problema.....	49
3.2.2.1 Análise da propagação dos erros.....	49

3.2.2.2 Considerações sobre o fator design da figura e o número de vértices.....	51
4. RESULTADOS.....	71
5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	77
5.1 Conclusões.....	77
5.2 Recomendações.....	80
6. REFERÊNCIAS.....	81

## 1. INTRODUÇÃO

Os levantamentos de imóveis urbanos são feitos geralmente em sistemas isolados, isto acontece pelo fato de não existir uma rede de referencia cadastral municipal com uma densidade suficiente que permita que os levantamentos dos bens imóveis sejam realizados num sistema único. Em algumas cidades, não existem normas, leis e nem mesmo locais dentro da estrutura pública destinados a receber e validar os levantamentos de imóveis urbanos.

Os levantamentos são realizados como se o imóvel fosse único, sendo desconsiderados os imóveis vizinhos e a planta oriunda do levantamento não é ou não pode ser utilizada para a confecção de uma carta cadastral do conjunto dos imóveis. A planta nem sempre é oriunda de um levantamento e traz apenas os elementos que servem para serem levados ao registro de imóveis, onde a transformam num memorial descritivo.

Quando se pensa em um levantamento que tenha como propósito o cadastro, este deve ser baseado numa rede única, com métodos de levantamentos definidos e com precisões estabelecidas. Se um agrimensor precisar executar outra medição ou relocar um ponto de um levantamento cadastral ele deve ter a certeza que os resultados da primeira medição estão em conformidade com as normas técnicas que foram estabelecidas para o cadastro.

Atualmente no cadastro urbano não há definições referentes às precisões e tolerâncias que devem ser utilizadas para atender a legislação vigente.

### 1.1. Objetivo Geral:

Apresentar uma proposta de precisão posicional para o cadastro urbano brasileiro.

### 1.1.2. Objetivos Específicos:

a) Apresentar e discutir a precisão posicional na legislação vigente no cadastro territorial brasileiro;

b) Apresentar uma proposta para a precisão posicional no cadastro urbano brasileiro baseada na lei de propagação das variâncias e na legislação vigente.

## 1.2 JUSTIFICATIVA:

O sistema cadastral brasileiro é caracterizado pela falta de padronização, sendo tratado de forma distinta se o imóvel se encontra em uma área urbana ou rural.

Em 1916, com o Código Civil Brasileiro, ficou estabelecido um erro máximo de 5% ou 1/20 na determinação da extensão ou área de um imóvel nos contratos de compra e venda. Essa exigência foi mantida no Novo Código Civil, em vigor a partir de 2003.

O Ministério das Cidades em 2009 criou a portaria nº 511 que define as diretrizes para a criação, instituição e atualização do Cadastro Territorial Multifinalitário (CTM) nos municípios brasileiros.

Loch (2012) afirma que “Lamentavelmente este documento de 2009 não evoluiu para uma Lei nacional do Cadastro Urbano, definindo a precisão que deve ser exigida para a medição dos vértices de cada parcela imobiliária.”

O cadastro de imóveis rurais foi inicialmente estabelecido pelo Estatuto da Terra em 1964 sob competência do Instituto Brasileiro de Reforma Agrária, atualmente denominado INCRA – Instituto Brasileiro de Colonização e Reforma Agrária, que em 1972 com a lei 5.868 instituiu o Sistema Nacional de Cadastro Rural – SNCR.

O Sistema Nacional de Cadastro Rural foi construído a partir de uma sistemática declaratória, sendo as informações cadastrais obtidas através da declaração dos proprietários dos imóveis.

Em 2001, com a regulamentação da lei 10.267 estabeleceu-se a necessidade de determinar as coordenadas dos vértices definidores dos limites dos imóveis rurais, georreferenciadas ao Sistema Geodésico Brasileiro, chegou-se a precisão posicional de  $\pm 50cm$  para um imóvel rural com 2 ha de área, considerada a dimensão mínima dos imóveis rurais no Brasil, porém esta precisão posicional, apesar de atender a legislação vigente e levar em consideração a lei de propagação dos erros das coordenadas, desconsiderou a forma geométrica do imóvel.

Este trabalho justifica-se pela possibilidade de apresentar uma solução para os imóveis urbanos, uma vez que, não existem estudos mostrando que precisão posicional os vértices localizados na esfera urbana devem ter.

## 2. REVISÃO DE LITERATURA:

### 2.1 Cadastro

Segundo a FIG - *International Federation of Surveyors* (1991):

Um Cadastro consiste num sistema de informação territorial atualizado, baseado em parcelas, contendo um registro de interesses relacionados ao território (por exemplo, direitos, restrições e responsabilidades). Normalmente inclui uma descrição geométrica das parcelas em conjunto com outros registros que descrevem a natureza dos interesses, a propriedade ou controle desses interesses, e freqüentemente o valor da parcela e suas benfeitorias. Pode ser estabelecido para propósitos fiscais (por exemplo, avaliação e taxação equitativa), para propósitos legais (transferência), para auxiliar na administração do uso da terra (por exemplo, no planejamento e outros propósitos administrativos), e permite o desenvolvimento sustentável e a proteção ambiental.

Conforme Loch (2001), o cadastro técnico multifinalitário compreende basicamente três pontos essenciais:

- A medição e representação cartográfica ao nível do imóvel,
- A legislação que rege a ocupação do solo e
- O desenvolvimento econômico do ocupante da terra.

#### 2.1.1 Cadastro no Brasil

De acordo com Loch (2007), o cadastro no Brasil de uma forma desorganizada existe a mais de um século, uma vez que desde os primórdios da colonização brasileira já se mediam as sesmarias e posteriormente as posses dos ocupantes.

Segundo Brandão (2003, p. 35):

No Brasil, ao contrário do que ocorre em outros países, não há uma legislação específica que trate

do cadastro. Com isso, os “cadastros técnicos” ou os “cadastros imobiliários” são realizados sem que haja algum tipo de padronização de procedimentos na sua execução. Assim, por exemplo, poucos são os cadastros em que são realizadas medições dos limites dos imóveis. Normalmente, os cadastros técnicos ou os cadastros imobiliários são constituídos de uma relação (lista) dos imóveis de uma área com informações relacionadas a eles, no entanto, desprovidos de dados de natureza métrica / geodésica confiável e, portanto, constituem-se de fato em censos imobiliários.

### 2.1.2 A precisão no Cadastro Brasileiro

No Brasil, trata-se distintamente o cadastro de imóveis rurais e urbanos (BRANDÃO, 2003), isto não é diferente quando a questão é a precisão. O termo precisão aparece poucas vezes na legislação brasileira.

Uma indicação de precisão aparece no Código Civil Brasileiro através da lei 10406/2002 que descreve no artigo 500 as disposicoes gerais sobre a compra e venda de um imóvel:

Art. 500. Se, na venda de um imóvel, se estipular o preço por medida de extensão, ou se determinar a respectiva área, e esta não corresponder, em qualquer dos casos, às dimensões dadas, o comprador terá direito de exigir o complemento da área, e não sendo isso possível, o de reclamar a resolução do contrato ou abatimento proporcional do preço.

Parágrafo 1º. Presume-se que a referência às dimensões foi simplesmente enunciativa, quando a diferença encontrada não exceder de um vinte avos da extensão total enunciada,ressalvando ao comprador o direito de provar que, em tais circunstâncias, não teria realizado o negócio.

Parágrafo 2º. Se em vez de falta houver excesso, e o vendedor provar que tinha motivos para ignorar a medida exata da área vendida, caberá ao comprador, à sua escolha, completar o valor correspondente ao preço ou devolver o excesso.

Parágrafo 3º. Não haverá complemento de área, nem devolução de excesso, se o imóvel for vendido como coisa certa e discriminada, tendo



sido apenas enunciativa a referência às suas dimensões, ainda que não conste, de modo expresso, ter sido a venda ad corpus.

Conforme Brandão (2003), no cadastro rural, a lei 10267/2001 instituiu o cadastro de coordenadas prevendo inclusive um critério de qualidade métrica, quando estabeleceu que nos casos de desmembramento, parcelamento ou remembramento e em todos os autos judiciais que versem sobre imóveis rurais, a identificação do imóvel “será obtida a partir de memorial descritivo, assinado por profissional habilitado e com a devida Anotação de Responsabilidade Técnica (ART), contendo as coordenadas dos vértices definidores dos limites dos imóveis rurais, georreferenciadas ao Sistema Geodésico Brasileiro e com precisão posicional a ser fixada pelo INCRA”.

A precisão posicional exigida na Lei 10.267 / 2001 foi fixada pela Portaria INCRA nº 954 de 13 de Novembro de 2002:

Art. 1º Estabelecer que o indicador da precisão posicional a ser atingido na determinação de cada par de coordenadas, relativas a cada vértice definidor do limite do imóvel, não deverá ultrapassar o valor de 0,50m, conforme o estabelecido nas Normas Técnicas para Levantamentos Topográficos.

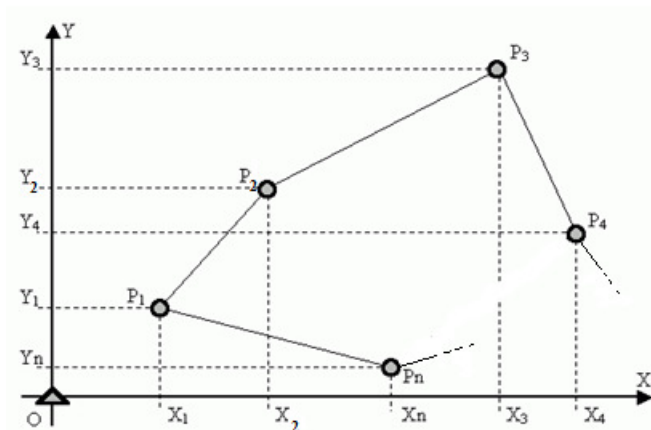
## 2.2 Cálculo da Área Superficial

Segundo Cremona e Galdino (2003), o cálculo da área de um polígono a partir das coordenadas dos vértices é o processo de cálculo tradicional, não só pela sua simplicidade, mas pela possibilidade de permitir o controle do cálculo, questão importante que leva segurança aos profissionais.

Os dados necessários para seu cálculo (Figura 1) são:

- Abscissas de cada ponto do polígono da parcela
- Ordenada dos mesmos pontos

**Figura 1** - Esquema das coordenadas para o cálculo da área.



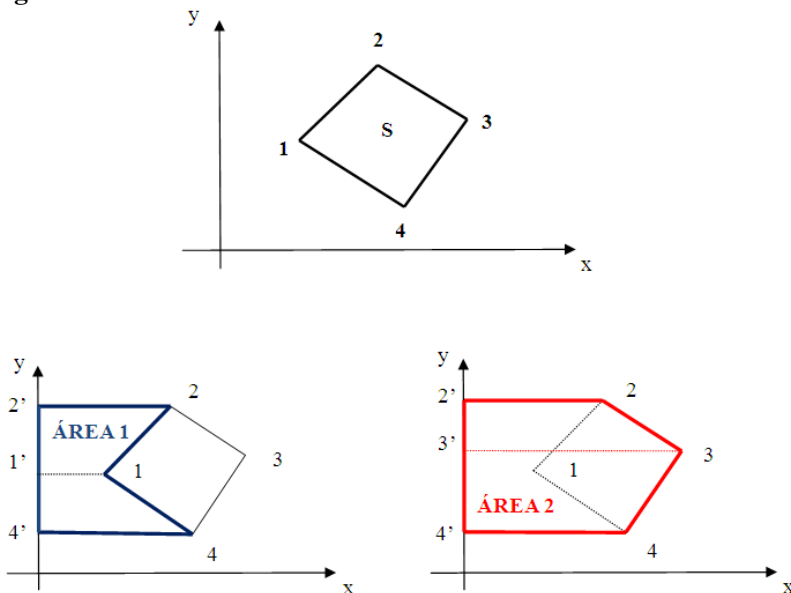
Fonte: Cremona e Galdino (2003).

A partir do esquema da Figura 1, a fórmula para o cálculo de uma área por Gauss é a seguinte:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i (x_{i+1} - x_{i-1}) = \frac{1}{2} \{ [y_1(x_2 - x_n) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + \dots + y_n(x_1 - x_{n-1})] \} \quad (2.2.a)$$

De acordo com Faggion, Veiga e Zanetti (2012), o cálculo da área de poligonais, pode ser realizado a partir do cálculo da área de trapézios formados pelos vértices da poligonal (fórmula de Gauss). Através da Figura 2 é possível perceber que a área da poligonal (S) definida pelos vértices 1, 2, 3 e 4 pode ser determinada através da diferença entre as áreas 1 e 2, ou seja:

$$S = \text{ÁREA 2} - \text{ÁREA 1} \quad (2.2.b)$$

**Figura 2** - Cálculo de áreas.

Fonte: Faggion, Veiga e Zanetti (2012).

A área 1 pode ser calculada a partir da soma das áreas dos trapézios formados pelos vértices 2', 2, 1, 1' e 1', 1, 4, 4'. A área 2 é obtida através da soma das áreas dos trapézios formados pelos vértices 2', 2, 3, 3' e 3', 3, 4, 4'.

A área de um trapézio qualquer é calculada através da fórmula:

$$A_{TRAPÉZIO} = \left( \frac{a+b}{2} \right) \cdot h \quad (2.2.c)$$

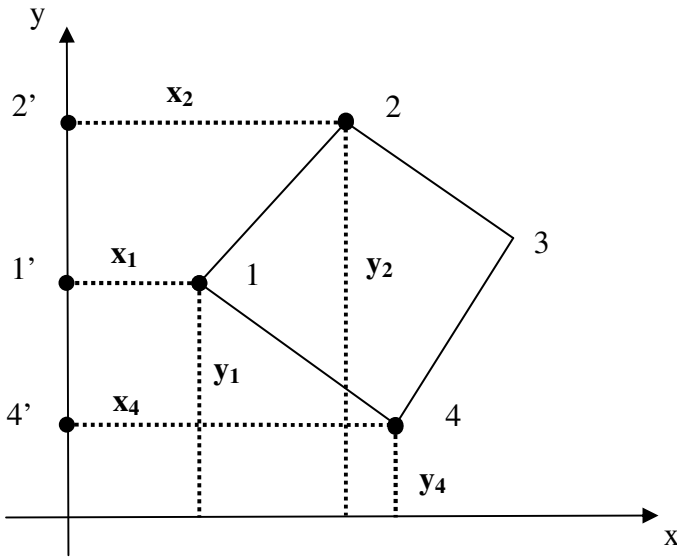
Onde:

a = base maior do trapézio;

b = base menor do trapézio;

h = altura do trapézio.

A Figura 3 apresenta a projeção dos vértices 1, 2 e 4 sobre o eixo dos y, determinando os vértices 1', 2' e 4' e as respectivas bases e alturas dos trapézios que compõem a área 1.

**Figura 3** - Projeção dos vértices 1, 2 e 4 sobre o eixo dos y

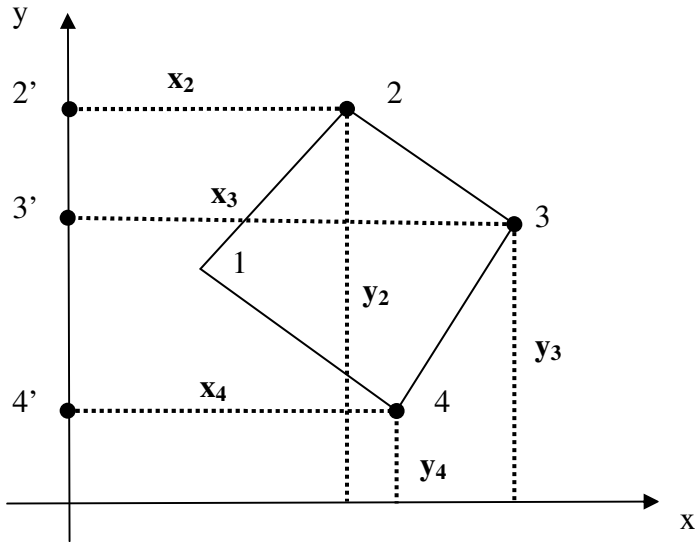
Fonte: Adaptado de Faggion, Veiga e Zanetti (2012).

Aplicando a expressão (2.2.c) aos trapézios 2'2 1 1' e 1'1 4 4', a área 1 será determinada por:

$$\text{ÁREA 1} = \frac{1}{2}(x_2 + x_1) \cdot (y_2 - y_1) + \frac{1}{2}(x_1 + x_4) \cdot (y_1 - y_4) \quad (2.2.d)$$

A Figura 4 apresenta a projeção dos vértices 2, 3 e 4 sobre o eixo dos y, determinando os vértices 2', 3', 4' e as respectivas bases e alturas dos trapézios que compõem a área 2.

**Figura 4** - Projeção dos vértices 2, 3 e 4 sobre o eixo dos y



Fonte: Adaptado de Faggion, Veiga e Zanetti (2012),

Aplicando a expressão (2.2.c) aos trapézios 2'2 3 3' e 3'3 4 4', a área 2 será determinada por:

$$\text{ÁREA 2} = \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \cdot (y_2 - y_3) + \frac{1}{2}(x_3 + x_4) \cdot (y_3 - y_4) \quad (2.2.e)$$

A área da poligonal (S) será determinada por:

$$S = \text{ÁREA 2} - \text{ÁREA 1} \quad (2.2.f)$$

Desenvolvendo a expressão (2.2.f), tem-se:

$$\begin{aligned} S &= \left[ \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \cdot (y_2 - y_3) + \frac{1}{2}(x_3 + x_4) \cdot (y_3 - y_4) \right] - \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2}(x_2 + x_1) \cdot (y_2 - y_1) + \frac{1}{2}(x_1 + x_4) \cdot (y_1 - y_4) \right] \\ S &= \frac{1}{2} \left[ (x_2 + x_3) \cdot (y_2 - y_3) + (x_3 + x_4) \cdot (y_3 - y_4) - \right. \\ &\quad \left. - (x_1 + x_2) \cdot (y_2 - y_1) - (x_4 + x_1) \cdot (y_1 - y_4) \right] \quad (2.2.g) \end{aligned}$$

Reescrevendo a expressão (2.2.g), eliminando o sinal negativo das somas parciais, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 2S &= (x_2 + x_3) \cdot (y_2 - y_3) + (x_3 + x_4) \cdot (y_3 - y_4) + \\
 &\quad + (x_1 + x_2) \cdot (y_1 - y_2) + (x_4 + x_1) \cdot (y_4 - y_1) \\
 2S &= (x_1 + x_2) \cdot (y_1 - y_2) + (x_2 + x_3) \cdot (y_2 - y_3) + \\
 &\quad + (x_3 + x_4) \cdot (y_3 - y_4) + (x_4 + x_1) \cdot (y_4 - y_1) \quad (2.2.h)
 \end{aligned}$$

Reescrevendo a expressão (2.2.h) executando as multiplicações indicadas, tem-se:

$$2S = x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2 + x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_2 - x_3y_3 + x_3y_3 - x_3y_4 + x_4y_3 - x_4y_4 + x_4y_4 - x_4y_1 + x_1y_4 - x_1y_1 \quad (2.2.i)$$

Simplificando os termos semelhantes e reescrevendo a expressão (2.2.i) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 2S &= x_2y_1 - x_4y_1 + x_3y_2 - x_1y_2 + x_4y_3 - x_2y_3 + x_1y_4 - x_3y_4 \\
 2S &= y_1(x_2 - x_4) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + y_4(x_1 - x_3) \quad (2.2.j)
 \end{aligned}$$

A expressão (2.2.j) pode ser generalizada para uma poligonal de n vértices por:

$$2S = \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}) \quad (2.2.k)$$

## 2.3 Teoria dos erros

### 2.3.1 Medição

De acordo com o Vocabulário de Termos Fundamentais e Gerais em Metrologia (1995), “medição é o conjunto de operações que tem por objetivo determinar um valor de uma grandeza.”

### 2.3.2 Resultado de uma medição

Conforme Tabacnicks (2003), em geral, o resultado de uma medição é somente uma aproximação ou estimativa do valor mensurado, do método de medição e do procedimento de medição. Resultado este que só é expresso de forma completa quando é acompanhado pela declaração da

incerteza dessa medição. Na maioria dos casos, o resultado de uma medição é determinado com base em séries de observações obtidas sob condições de repetitividade.

### 2.3.3 Erros e incertezas

De acordo com Vuolo (1996), os objetivos da teoria de erros consistem em determinar o melhor valor possível para a grandeza a partir das medições e determinar quanto o melhor valor obtido pode ser diferente do valor verdadeiro.

Se  $X_V$  é o valor verdadeiro de um mensurando e  $X$  é o resultado de uma medição, o erro em  $X$  é definido por:

$$E_X = X - X_V \quad (2.3.3)$$

Todas as medidas ou observações feitas, estão afetadas de erros de diferentes classes. Assim é impossível determinar a verdadeira magnitude de uma distância ou de um ângulo medido. O valor exato fica somente na nossa imaginação. Não se pode obter mais que o valor provável. O resultado de uma medição é sempre uma aproximação para o valor verdadeiro. (CABRAL; FRANÇA; HASENAK. 2003).

Segundo Tabacnicks (2003), os termos “erro e “incerteza” não são sinônimos, ao contrário, representam conceitos completamente diferentes.

Ainda segundo Tabacnicks (2003, p. 7),

Incerteza (da medida). Parâmetro associado ao resultado de uma medição que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando. O parâmetro pode ser um desvio padrão (ou um múltiplo dele) ou a metade do intervalo de uma escala. Uma dada incerteza corresponde, em geral a um dado nível de confiança (probabilidade de encontrar o valor num dado intervalo).

### 2.3.4 Tipos de erros

Em uma medição geralmente ocorrem erros de vários tipos, erros estes que podem ser agrupados em três grandes grupos que são os erros grosseiros, erros sistemáticos e os erros acidentais ou erros aleatórios.

#### Erros grosseiros

Este erro é devido à inabilidade do medidor, sendo evitáveis através de treinamento e prática. Resultam de um descuido e pode ser evitado efetuando as medições com cuidado. Este tipo de erro é descoberto repetindo-se a medição, isto é, fazendo medições de controle (CABRAL; FRANÇA; HASENAK. 2003).

#### Erros sistemáticos

Segundo Albertazzi Jr., (2002) o erro sistemático é a parcela de erro sempre presente nas medições realizadas em idênticas condições de operação. Um dispositivo mostrador com seu ponteiro "torto" é um exemplo clássico de erro sistemático, que sempre se repetirá enquanto o ponteiro estiver torto.

Conforme Cordini (2010):

São erros que, nas mesmas condições, apresentam o mesmo valor e sinal. São, portanto, erros cumulativos. Se a causa do erro sistemático é conhecida, o mesmo pode ser evitado através da utilização de técnicas especiais de observação ou calculado e eliminado da observação mediante fórmulas matemáticas. Os erros sistemáticos decorrem das imperfeições do observador (alguma deficiência ou vício), do instrumento (em condições diferentes daquelas para as quais foram calibradas) do próprio método de medida (equação matemática não representativa da realidade do fenômeno).

#### Erros acidentais (ou aleatórios)

Segundo Tabacnicks (2003), este tipo de erro está relacionado com a precisão de uma medição, é a parcela imprevisível do erro, em geral se fizermos a mesma medida várias vezes, veremos que os resultados obtidos não são os mesmos, embora sejam próximos, e portanto distribuem-se em torno de um certo valor de forma aleatória, o erro aleatório não pode ser compensado, mas pode ser reduzido aumentando



o número de observações. Para estimar estes erros, usa-se tratamento estatístico.

De acordo com Vuolo(1996, p. 81):

Erros estatísticos (ou aleatórios) resultam de variações aleatórias no resultado de medição, devido a fatores que não podem ser controlados ou que, por qualquer motivo, não são controlados. Em geral, estas variações se devem somente ao processo de medida, mas em certos casos, as variações aleatórias são intrínsecas do próprio mensurando.

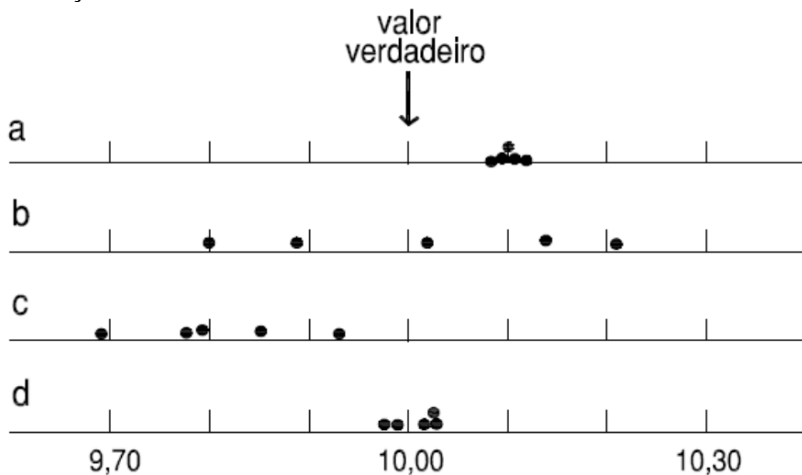
### 2.3.5 Precisão e exatidão

De acordo com a NBR 13133/1994, “Exatidão é o grau de aderência das observações em relação ao seu valor verdadeiro.” e “Precisão é o valor que expressa o grau de aderência das observações entre si.” A exatidão é também conhecida como acurácia.

Conforme o Vocabulário de Termos Fundamentais e Gerais em Metrologia (1995), o termo precisão não deve ser utilizado como exatidão.

Segundo Cabral, França e Hasenack (2003), a Figura 5 representa quatro situações distintas de medições em uma base de calibração onde a diferença entre precisão e exatidão e sua relação com os erros aleatórios e sistemáticos fica evidenciada.

**Figura 5** - Quatro situações distintas de medições em uma base de calibração



Fonte: Cabral, França e Hasenack (2003).

Em (a), os pontos apresentam pouca dispersão entre si, encontram-se bem agrupados o que indica boa precisão. Porém, estão deslocados do valor verdadeiro, o que indica elevado nível de erros sistemáticos. Portanto a medição tem precisão, mas não tem exatidão (acurácia).

Em (b) a distribuição dos pontos medidos é uniforme em torno do valor verdadeiro, o que indica boa exatidão. Nota-se que o resultado é pouco preciso por haver grande dispersão das medições entre si (fraco agrupamento). Pode-se afirmar que a medição apresenta elevado nível de erros aleatórios enquanto o erro sistemático é baixo.

Em (c), além dos pontos medidos não estarem bem agrupados estão deslocados do valor verdadeiro. Neste caso, tanto os erros aleatórios quanto sistemáticos são grandes.

Em (d), os pontos medidos estão bem agrupados em torno do valor verdadeiro, o que indica que a medição é precisa e exata.

Ainda conforme Cabral, França e Hasenack (2003), quando isentos de erros sistemáticos, os valores medidos estão distribuídos aleatoriamente em torno do valor verdadeiro, isto é, todos os valores medidos se repartem ao redor, pouco mais ou menos do valor verdadeiro, tem exatamente os mesmos à esquerda e à direita. Eles sempre estão mais densos nas proximidades do valor verdadeiro e mais dispersos na medida em que se afastam deste.

Como a distribuição é aleatória, isto caracteriza um erro acidental (pequenos erros inevitáveis na medição). Estes são erros aleatórios, não havendo, portanto erro sistemático.

Observa-se que a precisão está associada ao agrupamento dos valores em relação ao valor médio. Percebe-se que em (d) os valores estão praticamente tão agrupados quanto em (a) e isto quer dizer que em (d) tem-se a mesma precisão que em (a), assim como (c) é mais preciso que (b). Como a exatidão é o agrupamento dos valores medidos em relação ao valor mais provável, as medidas de (b) e (d) estão mais próximas do exato se comparadas com (a) e (c), pois estão mais agrupadas em relação ao valor verdadeiro. Observa-se também que em (b), mesmo existindo uma grande variação das medidas, elas se encontram em torno do valor verdadeiro. A média das medidas em (b) estará próxima do valor verdadeiro.

As propriedades dos erros aleatórios são ressaltadas claramente na curva de erros, também conhecida como Curva de Gauss.

### 2.3.6 Distribuição Normal ou Gaussiana

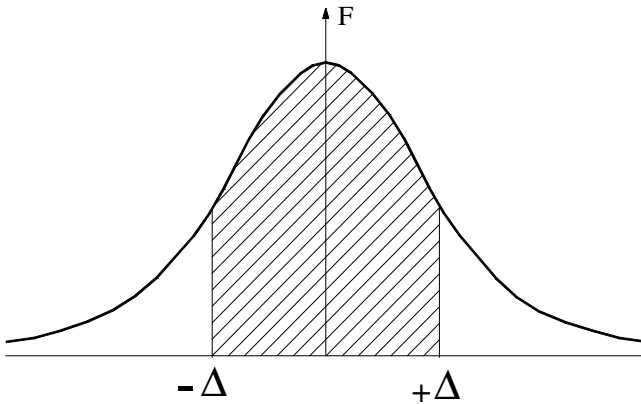
Segundo Xerez (1947), em qualquer medição, efetuada repetidas vezes, nas mesmas condições (mesmo operador, instrumento, método, etc.), a teoria das probabilidades mostra e a experiência permite verificar que os erros acidentais produzidos gozam de propriedades idênticas às propriedades da curva de distribuição normal.

1 - A um erro positivo corresponde um erro negativo de mesmo valor absoluto (os erros positivos e negativos de mesmo valor absoluto têm igual probabilidade).

2 - Os erros pequenos são os mais numerosos (o erro nulo é o mais provável.)

3 - A probabilidade de se cometer um erro, em valor absoluto, menor que  $\Delta$  (erro compreendido entre  $+\Delta$  e  $-\Delta$ ) é igual a área hachurada da Figura 6.

4 - A área total limitada pela curva é a probabilidade de se cometer todos os erros é, portanto, igual à unidade (100%).

**Figura 6** - Probabilidade de erros absolutos menores que  $\Delta$ .

Fonte: Xerez (1947).

Conforme Volpi (2007), a distribuição normal constitui, na realidade, uma “família” infinitamente grande de distribuições – uma para cada combinação possível de média e desvio padrão. Conseqüentemente, seria inútil procurar elaborar tabelas que atendessem a todas as necessidades. Além disso, a expressão da curva de distribuição normal (2.3.6.a) não é conveniente para tal objetivo, em vista de sua complexidade.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.3.6.a)$$

onde:

$e = 2,718281828\dots$  : base do logaritmo neperiano ou natural.

$x$  : valor arbitrário;

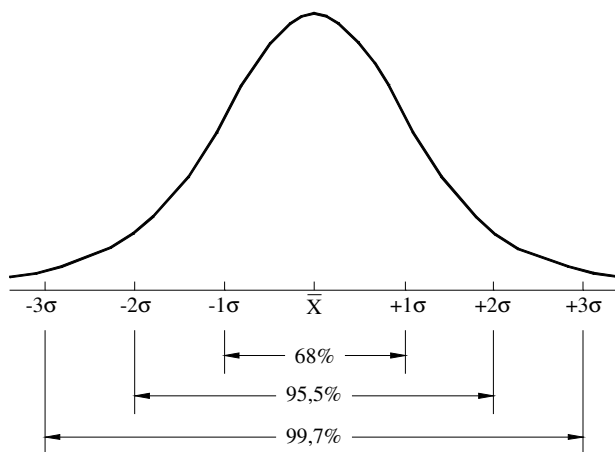
$\mu$  : média da distribuição normal;

$\sigma$  : desvio padrão da distribuição normal.

Ainda conforme Volpi (2007), se uma variável tem distribuição normal, cerca de 68% de seus valores cairão no intervalo de um desvio padrão a contar a partir de cada lado da média; cerca de 95,5% no intervalo de dois desvios padrões a contar da média, e cerca de 99,7% dentro de três

desvios padrões a contar da média. A Figura 7 ilustra a idéia. Além do mais, isto é verdade quaisquer que sejam a média e o desvio padrão de uma distribuição normal particular; isto é, é válido para todas as distribuições normais.

**Figura 7** - Probabilidades associadas com uma distribuição normal.



Fonte: Volpi (2007).

### 2.3.7 Como determinar a incerteza de uma medição

- Para uma única medida

Segundo Furriel (2010), se o experimentador realiza apenas uma medida da grandeza é costume tomar a incerteza como sendo a metade da menor divisão da escala do instrumento utilizado, denominando-a desvio avaliado ou incerteza.

- Para várias medidas

Segundo Vuolo (1994), por medições em condições de repetitividade, entende-se medições de um mesmo mensurando, repetidas pelo mesmo experimentador, com os mesmos instrumentos e nas mesmas condições ambientais. Medições desse tipo são denominadas “medições idênticas”. Devido a erros aleatórios, os resultados das  $n$  medições são diferentes, em geral. Indicando os resultados por

$$X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n,$$

o valor médio é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.3.7.a)$$

Espera-se que o valor médio  $\bar{x}$  se torne tanto mais preciso quanto maior for o número  $n$  de medições. Esse valor limite é definido como o valor médio verdadeiro:

$$x_{mv} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} \quad (2.3.7.b)$$

Ainda, conforme Vuolo (1994), como, na prática, o número  $n$  de medições não pode ser infinito, é evidente que o valor médio verdadeiro é uma quantidade desconhecida. Assim, é admitido que a melhor estimativa para o valor médio verdadeiro  $X_{mv}$ , que pode ser obtido a partir de  $n$  medições idênticas é o valor médio  $\bar{X}$ .

De acordo com Volpi (2007), a variância é a medida de dispersão das observações em torno de um valor mais provável. É definida como a média do quadrado dos desvios ou resíduos. É comum para o cálculo da variância, adotar o seguinte critério:

Se o número de observações ( $n$ ) for menor do que 30, a variância é obtida por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (2.3.7.c)$$

Se o número de observações ( $n$ ) for maior do que 30:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (2.3.7.d)$$

Volpi (2007) também ressalta que, o desvio padrão corresponde ao grau de incerteza da observação e é obtido a partir da raiz quadrada da variância.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (2.3.7.e)$$

A variância  $\sigma^2$  é a média dos quadrados dos desvios, enquanto que o desvio padrão é a raiz quadrada desta média. Por isso, o desvio padrão também é chamado de raiz média quadrática (CABRAL; FRANÇA; HASENAK. 2003).

Segundo Vuolo (1994), a incerteza de um resultado pode ser especificada de diferentes maneiras. As formas mais usuais para indicar incerteza são:

- Incerteza padrão ( $\sigma$ ),
- Incerteza expandida com confiança P ( $k \cdot \sigma$ ),
- Limite de erro (L) e
- Erro provável ( $\Delta$ )

A incerteza padrão pode ser definida como o desvio padrão da distribuição de erros.

A incerteza expandida com confiança P é um multiplo da incerteza padrão ( $k \cdot \sigma$ ). Os valores do fator multiplicativo são mostrados no Quadro 1.

**Quadro 1** - Intervalos de confiança para incertezas e correspondentes níveis de confiança, no caso de distribuições gaussianas para os erros.

Incerteza	Intervalo de confiança	Confiança
Incerteza padrão - $\sigma_v$	$(x - \sigma_x) < x_v < (x + \sigma_x)$	68,27%
$2\sigma_v$	$(x - 2\sigma_x) < x_v < (x + 2\sigma_x)$	95,45%
$3\sigma_v$	$(x - 3\sigma_x) < x_v < (x + 3\sigma_x)$	99,73%
$\delta - 1,645\sigma_v$	$(x - \delta) < x_v < (x + \delta)$	90%
$\delta - 2,576\sigma_v$	$(x - \delta) < x_v < (x + \delta)$	99%
Erro provável - $\Delta$	$(x - \Delta) < x_v < (x + \Delta)$	50%

Fonte: Adaptado de Vuolo (1994).

Conforme Xerez (1947), o limite do erro ( L ) é o valor máximo admissível para o erro. No caso de uma distribuição gaussiana para erros, não existe um limite de erro absoluto, pois a gaussiana nunca se anula, teoricamente. Entretanto, a Figura 8 mostra que a gaussiana praticamente se anula para erro maior que  $L = 3 \cdot \sigma$ . Por isso, este valor é frequentemente considerado como limite de erro. Isto é, a incerteza

expandida com confiança  $P = 99,73\%$  pode ser considerada como “limite de erro”.

Assim,

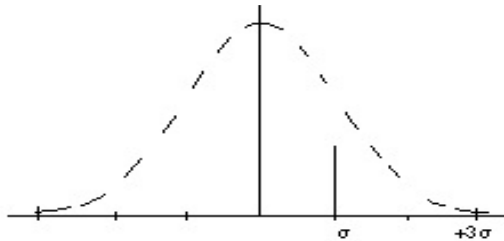
$$L = 3 \cdot \sigma \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{L}{3} \quad (2.3.7.f)$$

Pode ser considerado como um “limite de erro com mais de 99% de confiança”. Também pode ser considerado um limite de erro com confiança menor, tal como aproximadamente 95%:

$$L = 2 \cdot \sigma \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{L}{2} \quad (2.3.7.g)$$

As equações ( 2.3.7.f ) e ( 2.3.7.g ) podem ser usadas para obter a incerteza padrão quando a distribuição de erros é gaussiana e um limite de erro com um certo nível de confiança pode ser estabelecido.

**Figura 8 - Distribuição gaussiana**



Fonte: Xerez (1947).

De acordo com Vuolo (1994), o erro provável é o valor  $\Delta$  que tem 50% de probabilidade de ser excedido pelo erro  $E$ , em módulo. O erro provável era muito usado no passado e não é mais utilizado.

### 2.3.8 Lei de Propagação das variâncias

Segundo Cordini (2010), supondo  $Y = F(x_1, x_2)$  uma função de duas variáveis não correlacionadas  $x_1$  e  $x_2$  com desvios padrão  $\sigma_{x_1}$  e  $\sigma_{x_2}$  conhecidos.



Sendo  $E_{x_1}$  e  $E_{x_2}$  os erros de medida das grandezas  $x_1$  e  $x_2$  numa série de obsevações, a correspondente função tomará a seguinte forma:

$$Y + E_Y = F(x_1 + E_{x_1}; x_2 + E_{x_2}) \quad (2.3.8.a)$$

Desenvolvendo a função  $F$  segundo a série de Taylor e desprezando os termos de segunda ordem e superiores, tem-se:

$$Y + E_Y = F(x_1, x_2) + \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot E_{x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot E_{x_2} \quad (2.3.8.b)$$

Como  $Y = F(x_1, x_2)$ , tem-se que:

$$E_Y = \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot E_{x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot E_{x_2} \quad (2.3.8.c)$$

Elevando-se ambos os membros da igualdade ao quadrado e desenvolvendo o produto notável:

$$E_Y^2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot E_{x_1} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot E_{x_1} \cdot E_{x_2} + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot E_{x_2} \right)^2 \quad (2.3.8.d)$$

Considerando que as grandezas  $x_1$  e  $x_2$  foram medidas várias vezes e somando os valores obtidos, vem que:

$$\sum_{i=1}^n E_Y^2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n E_{x_1}^2 + 2 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \sum_{i=1}^n E_{x_1} \cdot E_{x_2} + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n E_{x_2}^2 \quad (2.3.8.e)$$

Porém, sendo  $x_1$  e  $x_2$  grandezas não correlacionadas e supondo a distribuição normal, podemos afirmar que:

$$\sum_{i=1}^n E_{x_1} \cdot E_{x_2} = 0 \quad (2.3.8.f)$$

Assim:

$$\sum_{i=1}^n E_Y^2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n E_{x_1}^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n E_{x_2}^2 \quad (2.3.8.g)$$

Considerando n, o número de vezes em que as grandezas foram medidas, pode-se reescrever:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_Y^2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_{x_1}^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_{x_2}^2 \quad (2.3.8.h)$$

Como,

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_Y^2;$$

$$\sigma_{x_1}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_{x_1}^2;$$

$$\sigma_{x_2}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_{x_2}^2.$$

Temos que:

$$\sigma_Y^2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \sigma_{x_2}^2 \quad (2.3.8.i)$$

Considerando o caso geral em que Y é função de várias grandezas,  $Y = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , resulta a expressão geral para a Lei de propagação dos erros<sup>1</sup> para os casos em que não há correlação entre as grandezas medidas.

$$\sigma_Y^2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left( \frac{\partial F}{\partial x_m} \right)^2 \cdot \sigma_{x_m}^2 \quad (2.3.8.j)$$

### 2.3.9 Método dos mínimos quadrados

Segundo Volpi (2007), considerando o caso da medida direta de uma grandeza X; sejam  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , os valores obtidos em uma série de n observações.

Na impossibilidade de obter o verdadeiro valor de X, deve-se contentar com uma estimativa mais provável. Adotando, o valor  $\hat{X}$  como o mais provável e calculando os resíduos (diferença entre o valor mais provável e cada uma das observações), têm-se:

---

---

<sup>1</sup>O termo lei de propagação das variâncias é mais comum em estatística, já em geodésia e topografia é mais comum usar-se o termo lei de propagação dos erros.

$$\hat{X} - M_1 = v_1$$

$$\hat{X} - M_2 = v_2$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\hat{X} - M_n = v_n$$

Esses resíduos são valores desconhecidos “a priori” que somados às observações brutas reproduzem o valor estimado  $\hat{X}$ .

Mudando o critério, pode-se eleger um valor diferente  $\hat{X}'$  como o mais provável, isto resultaria em um novo conjunto de resíduos:

$$\hat{X}' - M_n = v_n'$$

E assim por diante:

$$\hat{X}'' - M_n = v_n''$$

Qual dos valores  $\hat{X}$ ,  $\hat{X}'$ ,  $\hat{X}''$  deve ser adotado para representar X? Em outras palavras, como escolher um critério que permita extrair das observações repetidas  $M_n$ , discrepantes entre si, um valor único para representar à incógnita X?

Em 1809, Carl Friedrich Gauss demonstrou que a melhor maneira de determinar um parâmetro desconhecido de uma equação de condições é minimizando a soma dos quadrados dos resíduos, mais tarde chamado de Mínimos Quadrados por Adrien-Marie Legendre.

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \min \quad (2.3.9.a)$$

Quando as observações não oferecem o mesmo grau de confiança, elas devem ser "homogeneizadas" através de pesos  $p_i$ :

$$\sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i^2 = \min \quad (2.3.9.b)$$

Atualmente, a linguagem matricial é mais usual devido a sua simplicidade e facilidade de cálculo.

$$V^T P V = \min \quad (2.3.9.c)$$

Onde:

V: vetor coluna dos resíduos.

P: matriz quadrada dos pesos.

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (2.3.9.d)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_n \end{pmatrix} \quad (2.3.9.e)$$

A matriz P dos pesos das observações apresentada corresponde a observações independentes (não correlacionadas), pois apresenta elementos apenas na diagonal principal.

De acordo com Xerez (1947), o postulado da média aritmética, que adota para valor mais provável a média aritmética do resultado de observações de igual precisão, conduz também ao princípio dos mínimos quadrados.

Supondo  $\hat{X}$  o valor mais provável de uma grandeza sobre a qual foram executadas n observações, repetidas em condições supostamente similares. Assim, os resíduos seriam:

$$\hat{X} - M_1 = v_1, \hat{X} - M_2 = v_2, \cdots \cdots \cdots, \hat{X} - M_n = v_n$$

Conforme o princípio dos mínimos quadrados (MMQ), temos:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{X} - M_i)^2 = \text{mínimo} \quad (2.3.9.f)$$

Derivando da função  $\varphi$  e igualando-a a zero, obtemos o valor mínimo da função:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{X}} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n (\hat{X} - M_i) = 0 \quad (2.3.9.h)$$

$$(\hat{X} - M_1) + (\hat{X} - M_2) + \cdots + (\hat{X} - M_n) = 0 \quad (2.3.9.i)$$

$$n \cdot \hat{X} - M_1 - M_2 - \cdots - M_n = 0 \quad (2.3.9.j)$$

$$n \cdot \hat{X} = \sum_{i=1}^n M_i \Rightarrow \hat{X} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{n} \quad (2.3.9.k)$$

Conforme já visto anteriormente, a expressão (2.3.9.k) corresponde à média aritmética.



### 3 MATERIAIS E MÉTODO

#### 3.1 Materiais Utilizados

Para realização desta pesquisa foram utilizados os seguintes materiais bibliográficos:

##### 3.1.1 Dissertações e Teses

- Brandão (2003) pesquisou o princípio da vizinhança geodésica no levantamento cadastral de campo de parcelas territoriais, cujo objetivo foi o de definir os procedimentos necessários para a caracterização espacial de parcelas territoriais no Brasil através de um levantamento cadastral com base no Princípio da Vizinhança das medições geodésicas, com a determinação das coordenadas dos pontos que definem os limites (extremas) das parcelas territoriais considerando uma tolerância posicional especificada.
- Miyashita (2008) avaliou uma metodologia de baixo custo para levantamentos cadastrais em áreas de expansão e vazios urbanos, utilizando imagens do satélite QuickBird de alta resolução espacial e dados provenientes de receptor GPS de navegação com processamento das observáveis, como principal instrumento para o cadastramento físico dessas glebas urbanas.
- Galdino (2006) desenvolveu estratégias de vinculação do sistema de referência geodésico oficial SIRGAS2000 para georreferenciamento de parcelas territoriais em virtude dos múltiplos sistemas de referência oficiais vigentes no Brasil.

##### 3.1.2 Documentos Legais

- Lei Federal nº 6.766/79, que dispõe sobre o parcelamento do solo urbano e dá outras providências.
- Lei estadual nº 10.957, que dispõe sobre o parcelamento do solo urbano de Santa Catarina e dá outras providências.
- Lei Federal nº 10.267/01, que exige a identificação georreferenciada dos imóveis rurais para fins de registro.
- Lei Federal nº 10.406/02, que institui o Código Civil Brasileiro.

### 3.1.3 Normas Técnicas

- Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT: NBR 13.133 (1994). Fixa as condições exigíveis para a execução de levantamento topográfico.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT: NBR 14.166 (1998). Define os procedimentos para a implantação da rede de referência cadastral municipal;
- INCRA. Norma Técnica para Georreferenciamento de Imóveis Rurais, 2ª edição revisada, (2010), do Ministério do Desenvolvimento Agrário, que define os procedimentos técnicos necessários para o georreferenciamento de imóveis rurais.

### 3.1.4 Softwares Utilizados

- Microsoft Office Excel 2007 : Confeção de planilhas para o cálculo de áreas, propagação dos erros e diagramas de dispersão.
- AutoCAD 2002: Visualização dos levantamentos topográficos, obtenção das coordenadas dos vértices limites das parcelas e sua representação gráfica.

## 3.2 Método

A pesquisa caracteriza-se como aplicada, quanto à natureza, devido aos conhecimentos estarem voltados para solução de problemas específicos da área estabelecidos no objetivo geral. Por “pesquisa aplicada entendemos o tipo de estudo sistemático motivado pela necessidade de resolver problemas concretos.” (MATTAR, 1999, p. 51)

Quanto à abordagem, a pesquisa caracteriza-se como quantitativa, pois os resultados serão quantificáveis, “procura medir o grau em que algo está presente”(MATTAR, 2005, p.81).

Caracteriza-se como descritiva, quanto aos objetivos, por propiciar um conhecimento mais detalhado a respeito do problema de pesquisa. As teorias e conceitos existentes serão aplicados ao problema para validá-lo. Segundo Gil (1996, p.46) a “pesquisa descritiva têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre as variáveis.”

Quanto aos procedimentos técnicos, a pesquisa caracteriza-se como pesquisa bibliográfica. A pesquisa bibliográfica é através de materiais já publicados, para facilitar o processo de obtenção de informações. Uma



“das formas mais rápidas e econômicas de amadurecer ou aprofundar um problema de pesquisa é através do conhecimento dos trabalhos já feitos por outros, via levantamentos bibliográficos” (MATTAR, 1999, p. 82).

### 3.2.1 Metodologia Proposta

Para a abordagem do tema “Uma proposta de precisão posicional para o cadastro urbano brasileiro” adotou-se os seguintes critérios:

Segundo Neto (2008), a parcela é uma fração (subárea) de um imóvel com regime jurídico único. Com esta definição ela deve ser a (menor) unidade do cadastro territorial (urbano/rural), especializada (delimitado, identificado e com área calculada), enfim, como unidade própria.

O imóvel, segundo este conceito, é dividido em tantas partes (parcelas) quantas forem as áreas com regimes jurídicos diferentes. Estas podem ser áreas de domínio, de posse, áreas públicas (como estradas, rios, lagos), ou áreas de restrições como reservas legais, de preservação, servidões administrativas ou legais, etc. Nos casos dos imóveis com um único regime jurídico (que provavelmente é a maioria), parcela e imóvel serão a mesma coisa.

Um imóvel é formado por uma ou várias parcelas, mas uma parcela nunca é dividida em vários imóveis. A parcela é sub-área do imóvel, nunca o contrário.

A lei federal 6766/79 estabelece que os lotes terão área mínima de 125m<sup>2</sup> (cento e vinte e cinco metros quadrados) e frente mínima de 5(cinco) metros.

A lei estadual 6063/82 alterada pela 10.957/98 estabelece o mesmo critério.

O Código Civil Brasileiro(1916) estabeleceu um erro máximo de 5% ou

$\frac{1}{20}$  na determinação da extensão ou área de um imóvel nos contratos de

compra e venda, essa exigência foi mantida no novo Código Civil, em vigor a partir de 2002.

Considerar-se-á para este trabalho parcelas com 125m<sup>2</sup> que são as dimensões parcelares mínimas definidas pela legislação.

### 3.2.2 Apresentação do problema

Os problemas a serem abordados neste trabalho são a aplicação da lei de propagação de erros de forma invertida e o cálculo de áreas por

coordenadas de Gauss, pelo fato de ser o método mais usual nos trabalhos de levantamentos cadastrais.

### 3.2.2.1 Análise da propagação dos erros

Utilizando a fórmula de Gauss para o cálculo de área de uma poligonal fechada, e para se determinar o desvio padrão da área  $\sigma_A$  se considerará que o desvio padrão das componentes X e Y dos pontos do polígono da parcela sejam iguais, então  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$  e não correlacionados.

Segundo a teoria já vista, o primeiro a calcular são as derivadas parciais da função em relação a todas as variáveis, no eixo X e no eixo Y. Assim: Para o eixo X:

$$\frac{\partial F}{\partial X(x_1)} = \frac{(y_1 - y_2)}{2}; \quad \frac{\partial F}{\partial X(x_2)} = \frac{(y_1 - y_3)}{2}; \quad \frac{\partial F}{\partial X(x_3)} = \frac{(y_2 - y_4)}{2}; \quad \dots; \quad \frac{\partial F}{\partial X(x_n)} = \frac{(y_{n-1} - y_1)}{2} \quad (3.2.2.1.a)$$

E, para o eixo Y:

$$\frac{\partial F}{\partial Y(y_1)} = \frac{(x_2 - x_n)}{2}; \quad \frac{\partial F}{\partial Y(y_2)} = \frac{(x_3 - x_1)}{2}; \quad \frac{\partial F}{\partial Y(y_3)} = \frac{(x_4 - x_2)}{2}; \quad \dots; \quad \frac{\partial F}{\partial Y(y_n)} = \frac{(x_1 - x_{n-1})}{2} \quad (3.2.2.1.b)$$

Mas considerando a fórmula do erro médio quadrático como:

$$\sigma_F^2 = a_{x_1}^2 \sigma_x^2 + a_{x_2}^2 \sigma_x^2 + \dots + a_{x_n}^2 \sigma_x^2 + a_{y_1}^2 \sigma_y^2 + a_{y_2}^2 \sigma_y^2 + \dots + a_{y_n}^2 \sigma_y^2 \quad (3.2.2.1.c)$$

Onde:

$$a_{x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \Rightarrow a_{x_i}^2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \text{ e } a_{y_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \Rightarrow a_{y_i}^2 = \left( \frac{\partial F}{\partial y_i} \right)^2,$$

são coeficientes, e:

$\sigma_X$  e  $\sigma_Y$ , são os desvios padrão das medições nos eixos X e Y respectivamente. Então resulta:

$$\sigma_F^2 = (a_{x_1}^2 + a_{x_2}^2 + \dots + a_{x_n}^2) \sigma_x^2 + (a_{y_1}^2 + a_{y_2}^2 + \dots + a_{y_n}^2) \sigma_y^2 \quad (3.2.2.1.d)$$

E logo, fazendo:

$$a_1^2 = \sum_{i=1}^n a_{x_i}^2 \text{ e } a_2^2 = \sum_{i=1}^n a_{y_i}^2$$

$$\text{Resulta finalmente: } \sigma_F^2 = a_1^2 \sigma_X^2 + a_2^2 \sigma_Y^2 \quad (3.2.2. e)$$

Ainda pela consideração que  $\sigma_X = \sigma_Y$

Então a expressão do erro médio quadrático toma o seguinte aspecto:

$$\sigma_F^2 = (a_1^2 + a_2^2) \cdot \sigma^2 \quad (3.2.2.1.f)$$

Ou, como uma fórmula generalizada:

$$\sigma_F^2 = \left( \sum_{i=1}^n a_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^n a_{y_i}^2 \right) \cdot \sigma^2 \quad (3.2.2.1.g)$$

Assim:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_F^2}{\sum_{i=1}^n a_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^n a_{y_i}^2} \quad (3.2.2.1.h)$$

### 3.2.2.2 Considerações sobre o fator design da figura e o número de vértices

Inicialmente serão feitas simulações considerando parcelas de forma retangular, frente de 5 metros e 125m<sup>2</sup> de área, por ser a área mínima legalizável.

- **Polígono de quatro vértices:**

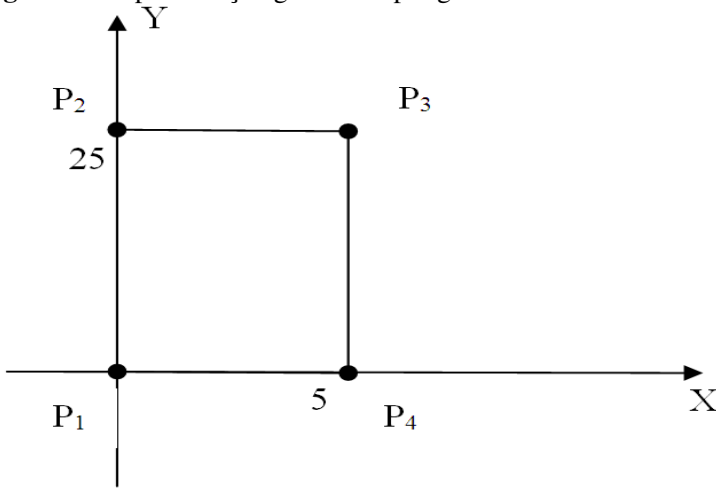
Coordenadas do polígono (em metros):

P1 (0,00; 0,00)

P2 (0,00; 25,00)

P3 (5,00; 25,00)

P4 (5,00; 0,00)

**Figura 9** - Representação gráfica do polígono

Tolerância para incerteza da área indicada na legislação ( $\sigma_F^2$ ):  
 $5\% \text{ de } 125\text{m}^2 = 6,25\text{m}^2$ .

Assim, a incerteza da área da Figura 9 pode ser expressa por:

$$A = (125 \pm 6,25)\text{m}^2$$

Da lei de propagação dos erros, vem que:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_F^2}{\sum_{i=1}^n a_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^n a_{y_i}^2} \quad (3.2.2.1. h)$$

Onde:  $a_{x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}$  e  $a_{y_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i}$ , sendo  $X_i$  e  $Y_i$  as coordenadas do ponto

$P_i$ .

Calculando  $\sum_{i=1}^n a_{x_i}^2$  e  $\sum_{i=1}^n a_{y_i}^2$ , tem-se:

Para o eixo X:

$$a_{x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1}{2}(y_4 - y_2) = \frac{1}{2}(0 - 25) = -12,5m$$

$$a_{x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{1}{2}(y_1 - y_3) = \frac{1}{2}(0 - 25) = -12,5m$$

$$a_{x_3} = \frac{\partial F}{\partial x_3} = \frac{1}{2}(y_2 - y_4) = \frac{1}{2}(25 - 0) = 12,5m$$

$$a_{x_4} = \frac{\partial F}{\partial x_4} = \frac{1}{2}(y_3 - y_1) = \frac{1}{2}(25 - 0) = 12,5m$$

Para o eixo Y:

$$a_{y_1} = \frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{1}{2}(x_2 - x_4) = \frac{1}{2}(0 - 5) = -2,5m$$

$$a_{y_2} = \frac{\partial F}{\partial y_2} = \frac{1}{2}(x_3 - x_1) = \frac{1}{2}(5 - 0) = 2,5m$$

$$a_{y_3} = \frac{\partial F}{\partial y_3} = \frac{1}{2}(x_4 - x_2) = \frac{1}{2}(5 - 0) = 2,5m$$

$$a_{y_4} = \frac{\partial F}{\partial y_4} = \frac{1}{2}(x_1 - x_3) = \frac{1}{2}(0 - 5) = -2,5m$$

Assim:

$$\sum_{i=1}^4 a_{x_i}^2 = a_{x_1}^2 + a_{x_2}^2 + a_{x_3}^2 + a_{x_4}^2 = 625m^2 \text{ e}$$

$$\sum_{i=1}^4 a_{y_i}^2 = a_{y_1}^2 + a_{y_2}^2 + a_{y_3}^2 + a_{y_4}^2 = 25m^2$$

Aplicando o modelo:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_F^2}{\sum_{i=1}^n a_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^n a_{y_i}^2} \quad (3.2.2.1.h)$$

Tem-se que:

$$\sigma^2 = \frac{39,0625}{650} \Rightarrow \sigma^2 = 0,060096 \Rightarrow \sigma = \sqrt{0,060096} \Rightarrow \sigma = 0,245m$$

Que representa o valor da tolerância posicional das coordenadas dos pontos que definem o polígono. Segundo a teoria dos erros, a precisão posicional de um ponto deve ter uma qualidade de no mínimo três vezes melhor que a tolerância especificada para garantir um nível de confiança de 99,7%. Então a precisão posicional dos pontos deste polígono deve ser de  $\pm 0,081m$ .

Aplicando estes valores às coordenadas dos pontos que definem o polígono obtém-se para área máxima,  $129,93 \text{ m}^2$  e área mínima  $120,12 \text{ m}^2$ , valores estes que atendem a legislação vigente que determina os valores de  $131,25 \text{ m}^2$  e  $118,75 \text{ m}^2$  para a respectiva área máxima e mínima.

- **Polígono de seis vértices:**

Coordenadas do polígono (em metros):

P1 (0,00; 0,00)

P2 (0,00; 12,50)

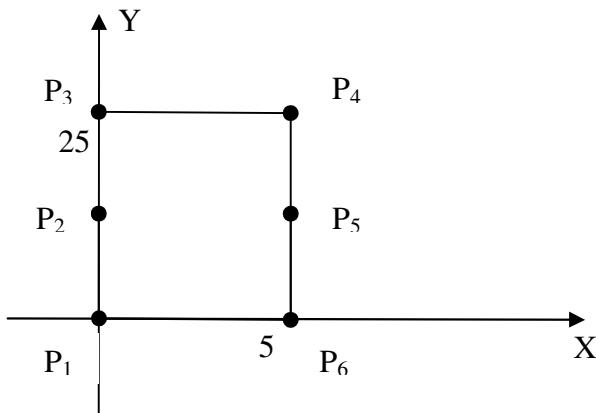
P3 (0,00; 25,00)

P4 (5,00; 25,00)

P5 (5,00; 12,50)

P6 (5,00; 0,00)

**Figura 10** - Representação gráfica do polígono



Fazendo o cálculo da área superficial por Gauss, obtém-se o mesmo resultado,  $125 \text{ m}^2$ .

Tolerância para incerteza da área indicada na legislação (5%):  $6,25 \text{ m}^2$ .

Assim, a incerteza da área da Figura 10 pode ser expressa por:

$$A = (125 \pm 6,25) \text{ m}^2$$

Calculando os coeficientes  $a_1^2 = \sum_{i=1}^6 a_{x_i}^2$  e  $a_2^2 = \sum_{i=1}^6 a_{y_i}^2$  através das derivadas parciais, tem-se:

$$\sum_{i=1}^6 a_{x_i}^2 = 468,75 \text{ m}^2$$

$$\sum_{i=1}^6 a_{y_i}^2 = 25 \text{ m}^2$$

Aplicando o modelo (3.2.2.1.h), tem-se que:

$$\sigma^2 = \frac{39,0625}{493,75} \Rightarrow \sigma^2 = 0,079113 \Rightarrow \sigma = \sqrt{0,079113} \Rightarrow \sigma = 0,281 \text{ m}$$

Que representa o valor da tolerância posicional das coordenadas dos pontos que definem o polígono. Então a precisão posicional dos pontos deste polígono deve ser de  $\pm 0,093 \text{ m}$ .

Aplicando estes valores às coordenadas dos pontos que definem o polígono obtemos para área máxima,  $130,66 \text{ m}^2$  e área mínima  $119,41 \text{ m}^2$ , valores estes que atendem a legislação vigente que determina os valores de  $131,25 \text{ m}^2$  e  $118,75 \text{ m}^2$  para área máxima e mínima respectivamente.

- **Polígono de oito vértices:**

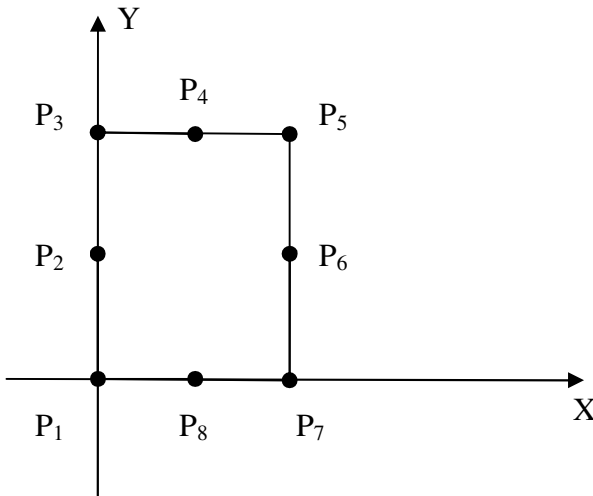
Coordenadas do polígono (em metros):

P1 (0,00; 0,00)

P2 (0,00; 12,50)

P3 (0,00; 25,00)  
 P4 (2,50; 25,00)  
 P5 (5,00; 25,00)  
 P6 (5,00; 12,50)  
 P7 (5,00; 0,00)  
 P8 (2,50; 0,00)  
 P1 (0,00; 0,00)

**Figura 11** - Representação gráfica do polígono



Tolerância para incerteza da área indicada na legislação (5%):  $6,25m^2$ .

Assim, a incerteza da área da Figura 11 pode ser expressa por:

$$A = (125 \pm 6,25)m^2$$

Calculando os coeficientes  $a_1^2 = \sum_{i=1}^8 a_{x_i}^2$  e  $a_2^2 = \sum_{i=1}^8 a_{y_i}^2$  através das derivadas parciais, tem-se:

$$\sum_{i=1}^8 a_{x_i}^2 = 468,75m^2$$



$$\sum_{i=1}^8 a_{y_i}^2 = 18,75m^2$$

Aplicando o modelo (3.2.2.1.h), tem-se que:

$$\sigma^2 = \frac{39,0625}{487,50} \Rightarrow \sigma^2 = 0,080128 \Rightarrow \sigma = \sqrt{0,080128} \Rightarrow \sigma = 0,283m$$

Assim, a precisão posicional dos pontos deste polígono deve ser de  $\pm 0,094m$ .

Aplicando estes valores as coordenadas dos pontos que definem o polígono obtemos para área máxima,  $129,91 m^2$  e área mínima  $120,14 m^2$ , valores estes que atendem a legislação.

Em resumo, pode-se indicar que para um polígono de mesma área o número de vértices influencia na precisão posicional de seus pontos, como se observa no Quadro 2.

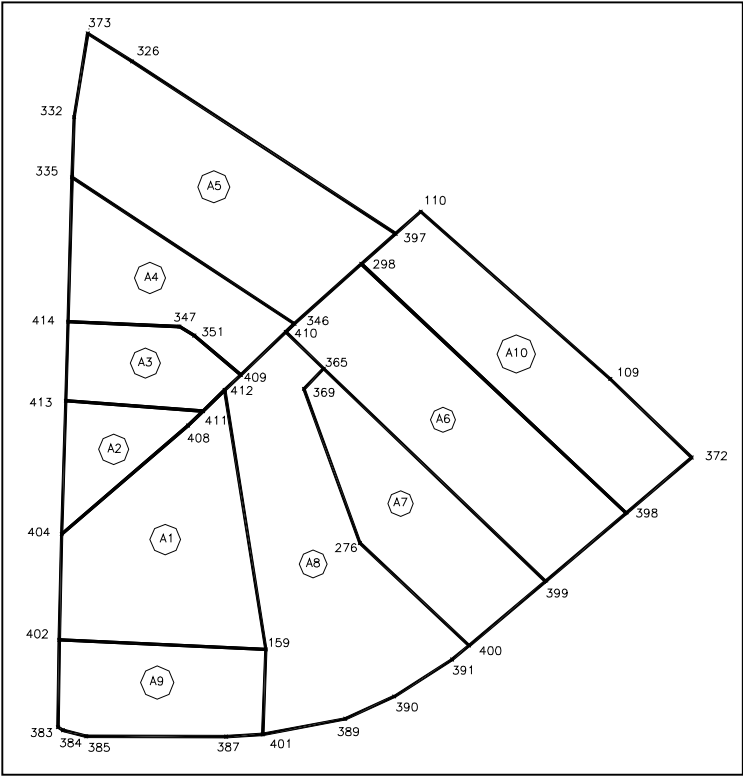
**Quadro 2** - Tolerância e precisão posicional em função do número de vértices para parcelas de forma retangular, frente de 5 metros e  $125m^2$  de área.

Número de vértices	Tolerância posicional	Precisão Posicional
4	$\pm 0,245m$	$\pm 0,081m$
6	$\pm 0,281m$	$\pm 0,093m$
8	$\pm 0,283m$	$\pm 0,094m$

Para um estudo mais aprofundado, serão consideradas algumas situações reais.

A área analisada é de  $4.235,02 m^2$  resultante de um amembramento de dez áreas que serão analisadas separadamente, conforme a Figura 12.

Figura 12 - Área total



FONTE: Levantamento topográfico - Jean W. Brasil CREASC 043422-7

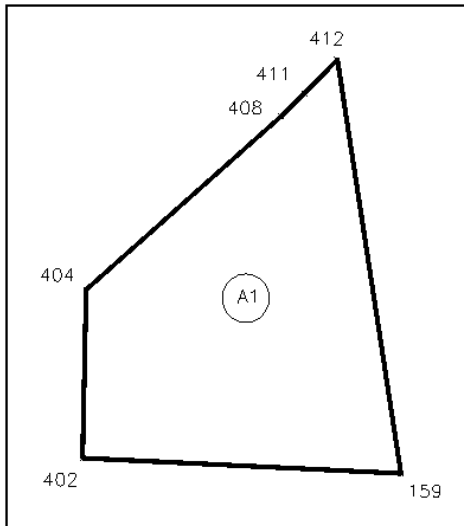
**Figura 13:** Quadro de áreas

<b>ÁREAS ( m<sup>2</sup> )</b>	
<b>ÁREA A1</b>	<b>536,41</b>
<b>ÁREA A2</b>	<b>143,26</b>
<b>ÁREA A3</b>	<b>188,11</b>
<b>ÁREA A4</b>	<b>301,81</b>
<b>ÁREA A5</b>	<b>641,61</b>
<b>ÁREA A6</b>	<b>577,42</b>
<b>ÁREA A7</b>	<b>386,00</b>
<b>ÁREA A8</b>	<b>699,89</b>
<b>ÁREA A9</b>	<b>289,32</b>
<b>ÁREA A10</b>	<b>471,19</b>

**Área 1:**

Coordenadas (em metros):

<b>Vértice</b>	<b>Xi</b>	<b>Yi</b>
P1 (412-159)	1885, 412	934, 509
P2 (159-402)	1859, 785	935, 714
P3 (402-404)	1860, 072	948, 836
P4 (404-408)	1875, 758	962, 353
P5 (408-411)	1877, 621	964,140
P6 (411-412)	1880, 299	966, 766

**Figura 14:** Área 1

FONTE: Levantamento topográfico - Jean W. Brasil CREASC 043422-7

Fazendo o cálculo da área superficial por Gauss, obtém-se  $536,41 \text{ m}^2$ . Tolerância para incerteza da área indicada na legislação (5%):  $26,82 \text{ m}^2$ . Assim, a incerteza da área da Figura 14 pode ser expressa por:

$$A = (536,41 \pm 26,82) \text{ m}^2$$

Calculando os coeficientes  $a_1^2 = \sum_{i=1}^6 a_{x_i}^2$  e  $a_2^2 = \sum_{i=1}^6 a_{y_i}^2$  através das derivadas parciais:

$$\sum_{i=1}^6 a_{x_i}^2 = 752,7023 \text{ m}^2$$

$$\sum_{i=1}^6 a_{y_i}^2 = 426,8411 \text{ m}^2$$

Aplicando o modelo, (3.2.2.1.h), tem-se que:

$$\sigma^2 = \frac{719,3392}{1179,2441} \Rightarrow \sigma^2 = 0,610000 \Rightarrow \sigma = \pm\sqrt{0,610000} \Rightarrow \sigma = 0,781m$$

Então, a precisão posicional dos pontos deste polígono deve ser de  $\pm 0,26m$ .

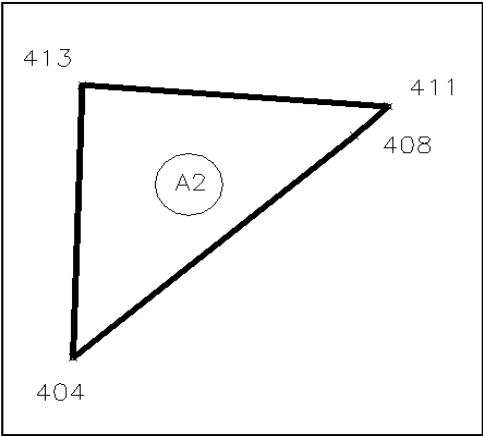
Aplicando estes valores as coordenadas dos pontos que definem o polígono obtemos para área máxima 543, 470 m<sup>2</sup> e área mínima 529, 886 m<sup>2</sup>, valores estes que atendem a legislação vigente que determina os valores de 563,05 m<sup>2</sup> e 509,59 m<sup>2</sup> para área máxima e mínima respectivamente.

**Área 2:**

Coordenadas (em metros):

Vértice	Xi	Yi
P1 (413-411)	1877, 621	964,14
P2 (411-408)	1875, 758	962, 353
P3 (408-404)	1860, 072	948, 836
P4 (404-413)	1860, 588	965, 45

**Figura 15 - Área 2**



FONTE: Levantamento topográfico - Jean W. Brasil CREASC 043422-7

Fazendo o cálculo da área superficial por Gauss, obtém-se 143,26 m<sup>2</sup>. Tolerância para incerteza da área indicada na legislação (5%): 7,16 m<sup>2</sup>

Assim, a incerteza da área da Figura 15 pode ser expressa por:

$$A = (143,26 \pm 7,16)m^2$$

Calculando os coeficientes  $a_1^2 = \sum_{i=1}^6 a_{x_i}^2$  e  $a_2^2 = \sum_{i=1}^6 a_{y_i}^2$  através das derivadas parciais, tem-se:

$$\sum_{i=1}^6 a_{x_i}^2 = 121,9019m^2$$

$$\sum_{i=1}^6 a_{y_i}^2 = 269,0482m^2$$

Aplicando o modelo (3.2.2.1.h), tem-se que:

$$\sigma^2 = \frac{51,2656}{390,9501} \Rightarrow \sigma^2 = 0,1311 \Rightarrow \sigma = \sqrt{0,1311} \Rightarrow \sigma = 0,362m$$

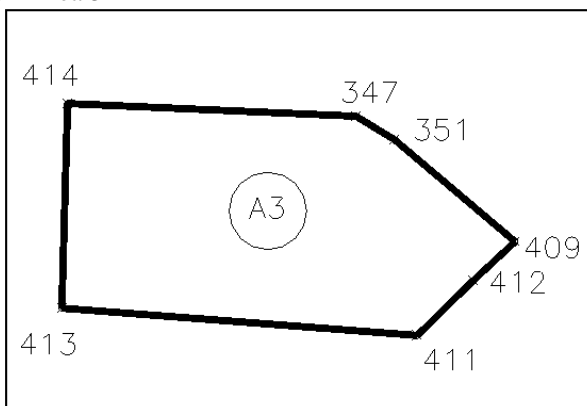
Assim, a precisão posicional dos pontos deste polígono deve ser de  $\pm 0,12m$ .

Aplicando estes valores as coordenadas dos pontos que definem o polígono obtemos para área máxima,  $144,50 m^2$  e área mínima  $142,13 m^2$ , valores estes que atendem a legislação vigente que determina os valores de  $150,42 m^2$  e  $136,10 m^2$  para área máxima e mínima respectivamente.

### Área 3:

Coordenadas (em metros):

Vértice	Xi	Yi
P1 (414-347)	1874, 685	974, 662
P2 (347-351)	1876, 528	973, 545
P3 (351-409)	1882, 315	968, 641
P4 (409-412)	1880, 299	966, 766
P5 (412-411)	1877, 621	964,140
P6 (411-413)	1860, 588	965, 450
P7 (413-414)	1860, 866	975, 274

**Figura 16 - Área 3**

FONTE: Levantamento topográfico - Jean W. Brasil CREASC 043422-7

Cálculo da área superficial:  $188,11 \text{ m}^2$ .

Tolerância para a incerteza da área indicada na legislação (5%):  $9,41 \text{ m}^2$ .

Assim, a incerteza da área da Figura 16 pode ser expressa por:

$$A = (188,11 \pm 9,41) \text{ m}^2$$

Calculando os coeficientes  $a_1^2 = \sum_{i=1}^6 a_{x_i}^2$  e  $a_2^2 = \sum_{i=1}^6 a_{y_i}^2$  através das

derivadas parciais, tem-se:

$$\sum_{i=1}^6 a_{x_i}^2 = 79,00362 \text{ m}^2$$

$$\sum_{i=1}^6 a_{y_i}^2 = 301,937 \text{ m}^2$$

Aplicando o modelo (3.2.2.1.h), tem-se que:

$$\sigma^2 = \frac{88,54}{380,94062} \Rightarrow \sigma^2 = 0,232445 \Rightarrow \sigma = \sqrt{0,232445} \Rightarrow \sigma = 0,482 \text{ m}$$

Logo, a precisão posicional dos pontos deste polígono deve ser de  $\pm 0,16 \text{ m}$ .

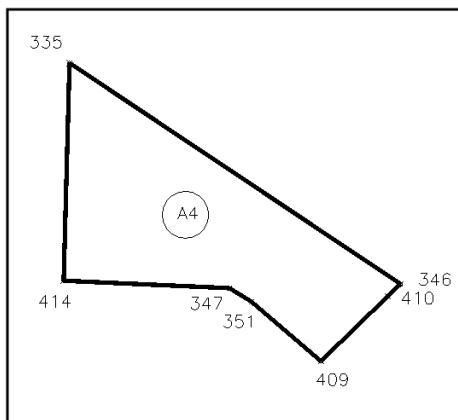
Aplicando estes valores as coordenadas dos pontos que definem o polígono obtemos para área máxima 193,48 m<sup>2</sup> e área mínima 183,26 m<sup>2</sup>, valores estes que atendem a legislação vigente que determina os valores de 197,52m<sup>2</sup> e 178,70 m<sup>2</sup> para área máxima e mínima respectivamente.

#### Área 4:

Coordenadas (em metros):

Vértice	Xi	Yi
P1 (335-346)	1888,953	975,007
P2 (346-410)	1887,887	973,992
P3 (410-409)	1882,315	968,641
P4 (409-351)	1876,528	973,545
P5 (351-347)	1874,685	974,662
P6 (347-414)	1860,866	975,274
P7 (414-335)	1861,353	993,221

**Figura 17 - Área 4**



FONTE: Levantamento topográfico - Jean W. Brasil CREASC 043422-7

Cálculo da área superficial: 301,81 m<sup>2</sup>.

Tolerância para a incerteza da área indicada na legislação (5%):  
15,09 m<sup>2</sup>.



Assim, a incerteza da área da Figura 17 pode ser expressa por:

$$A = (301,81 \pm 15,09)m^2$$

Calculando os coeficientes  $a_1^2 = \sum_{i=1}^6 a_{x_i}^2$  e  $a_2^2 = \sum_{i=1}^6 a_{y_i}^2$  através das derivadas parciais, tem-se:

$$\sum_{i=1}^6 a_{x_i}^2 = 198,5575m^2$$

$$\sum_{i=1}^6 a_{y_i}^2 = 536,82m^2$$

Aplicando o modelo (3.2.2.1.h), tem-se que:

$$\sigma^2 = \frac{227,7081}{735,3775} \Rightarrow \sigma^2 = 0,309647 \Rightarrow \sigma = \sqrt{0,309647} \Rightarrow \sigma = 0,556m.$$

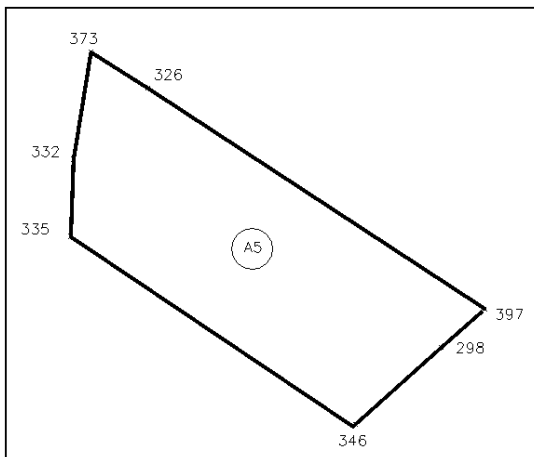
Então a precisão posicional dos pontos deste polígono deve ser de  $\pm 0,185m$ .

Aplicando estes valores as coordenadas dos pontos que definem o polígono obtemos para área máxima  $305,79 m^2$  e área mínima  $296,99 m^2$ , valores estes que atendem a legislação vigente que determina os valores de  $316,90 m^2$  e  $286,72 m^2$  para área máxima e mínima respectivamente.

### Área 5:

Coordenadas (em metros):

Vértice	Xi	Yi
P1 (373-326)	1868,810	1007,631
P2 (326-397)	1901,503	986,209
P3 (397-298)	1897,263	982,461
P4 (298-346)	1888,953	975,007
P5 (346-335)	1861,353	993,221
P6 (335-332)	1861,622	1000,705
P7 (332-373)	1863,307	1011,114

**Figura 18 - Área 5**

FONTE: Levantamento topográfico - Jean W. Brasil CREASC 043422-7

Cálculo da área superficial:  $641,61 \text{ m}^2$ .

Tolerância para a incerteza da área indicada na legislação (5%):

$32,08 \text{ m}^2$ .

Assim, a incerteza da área da Figura 18 pode ser expressa por:

$$A = (641,61 \pm 32,08) \text{ m}^2$$

Calculando os coeficientes  $a_1^2 = \sum_{i=1}^6 a_{x_i}^2$  e  $a_2^2 = \sum_{i=1}^6 a_{y_i}^2$  através das derivadas parciais, temos:

$$\sum_{i=1}^6 a_{x_i}^2 = 630,8916 \text{ m}^2$$

$$\sum_{i=1}^6 a_{y_i}^2 = 1129,502 \text{ m}^2$$

Aplicando o modelo (3.2.2.1.h), tem-se que:

$$\sigma^2 = \frac{1029,1585}{1760,3936} \Rightarrow \sigma^2 = 0,584618 \Rightarrow \sigma = \sqrt{0,584618} \Rightarrow \sigma = 0,764 \text{ m}.$$

Portanto, a precisão posicional dos pontos deste polígono deve ser de  $\pm 0,254 \text{ m}$ .

Aplicando estes valores as coordenadas dos pontos que definem o polígono obtemos para área máxima 647,61 m<sup>2</sup> e área mínima 637,21 m<sup>2</sup>, valores estes que atendem a legislação vigente que determina os valores de 673,69 m<sup>2</sup> e 609,53 m<sup>2</sup> para área máxima e mínima respectivamente.

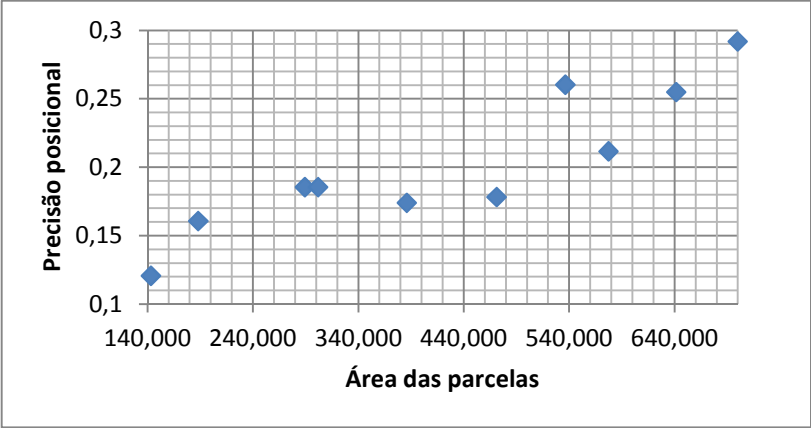
Em resumo, o Quadro 3 apresenta área, número de vértices, tolerância posicional e precisão posicional das dez parcelas em estudo.

**Quadro 3** - Área, número de vértices, tolerância posicional e precisão posicional.

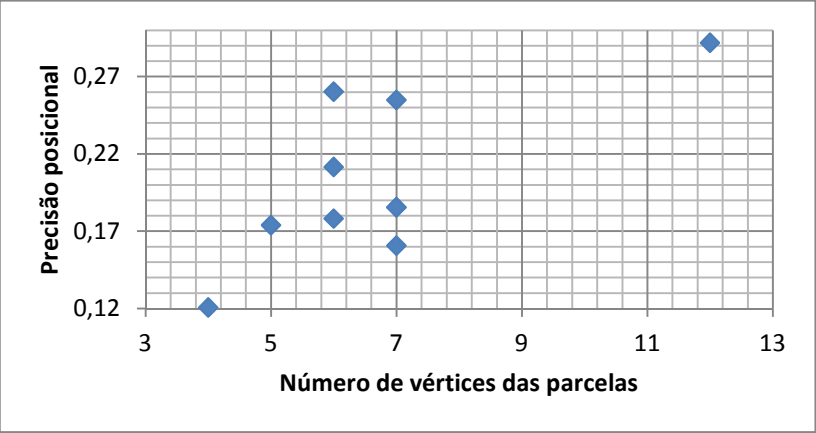
Área	Número de vértices	Área (m <sup>2</sup> )	Tolerância posicional (m)	Precisão Posicional (m)
A1	6	536,41	0,7809	0,2603
A2	4	143,26	0,3621	0,1207
A3	7	188,11	0,4821	0,1607
A4	7	301,81	0,5565	0,1855
A5	7	641,61	0,7646	0,2549
A6	6	577,42	0,6349	0,2116
A7	5	386,00	0,5221	0,1740
A8	12	699,89	0,8756	0,2919
A9	7	289,32	0,5564	0,1855
A10	6	471,19	0,5345	0,1782

Através dos dados compilados no quadro 3 pode-se construir um diagrama de dispersão entre precisão posicional e área das parcelas e também o diagrama de dispersão entre precisão posicional e número de vértices das parcelas, apresentados nas Figuras 19 e 20 respectivamente.

**Figura 19:** Diagrama de dispersão: PRECISÃO POSICIONAL x ÁREA DAS PARCELAS



**Figura 20:** Diagrama de dispersão: PRECISÃO POSICIONAL x N° VÉRTICES DAS PARCELAS



## 4 RESULTADOS

Após a análise da aplicação do modelo inverso da lei de propagação dos erros aos casos simulados da parcela mínima legalizável no cadastro urbano e as dez parcelas estudadas posteriormente chegou-se a resultados bastante expressivos.

O diagrama de dispersão da figura 19 indica a existência de uma correlação entre precisão posicional e área da parcela, de forma geral, à medida que aumenta a área da parcela menor poderá ser a precisão na determinação de seus vértices para que sua área atenda os limites exigidos na legislação.

Já o diagrama da Figura 20 indica que a associação entre precisão posicional e número de vértices da parcela é fraca, ou pode não haver correlação alguma.

Observando o Quadro 3 percebe-se que as parcelas A3, A4, A5 e A9 apesar de apresentarem mesmo número de vértices, suas áreas são diferentes e a relação precisão posicional e área da parcela se mantém semelhante ao indicado na Figura 19, sendo que as parcelas A4 e A9 apresentaram mesma precisão posicional para áreas aproximadamente iguais. As parcelas A1, A6 e A10 apresentam ambas seis vértices, porém as parcelas A1 e A6 contrariam o que foi visto até agora, pois a parcela A6 apresenta área de 577,42 m<sup>2</sup> e precisão posicional  $\sigma = \pm 21,1 \text{ cm}$  enquanto que a parcela A1 apresenta área de 536,71 m<sup>2</sup> e precisão posicional  $\sigma = \pm 26,0 \text{ cm}$ . Para um estudo mais detalhado desta questão serão feitas simulações com parcelas de quatro vértices, mesma área e forma geométrica retangular com variação de seus lados.

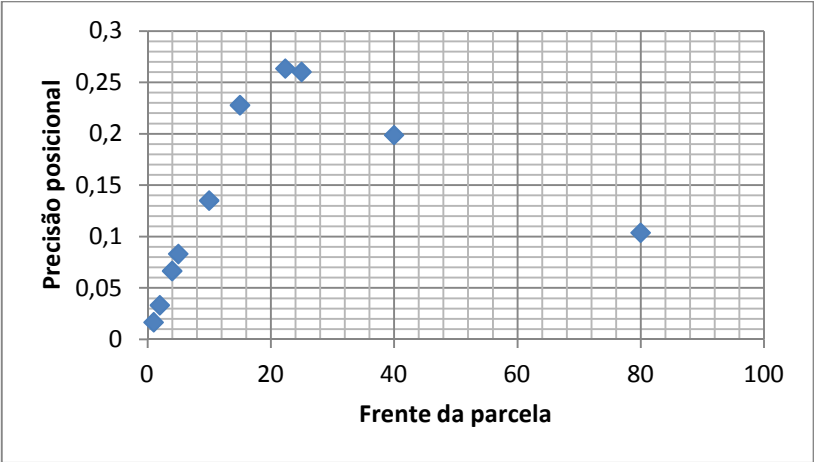
O Quadro 4 apresenta a simulação de dez casos com frente, fundos e precisão posicional para parcelas com 4 vértices e 500 m<sup>2</sup> de área, onde a precisão posicional foi obtida através do modelo proposto nesta pesquisa, considerando uma tolerância para incerteza da área de 5% (25 m<sup>2</sup>) conforme estabelecido no código civil.

**Quadro 4 -** Simulação da precisão posicional em função da variação dos lados para parcelas com 4 vértices e 500 m² de área

Frente (m)	Fundos (m)	Precisão Posicional(m)
1	500	0,016
2	250	0,033
4	125	0,066
5	100	0,083
10	50	0,135
15	33,34	0,227
22,36	22,36	0,263
25	20	0,260
40	12,5	0,198
80	6,25	0,103

Através dos dados obtidos nas simulações, a Figura 21 apresenta um diagrama de dispersão entre a precisão posicional e a frente das parcelas em estudo.

**Figura 21 -** Diagrama de dispersão: PRECISÃO POSICIONAL x FRENTE DA PARCELA COM 4 VÉRTICES E 500 m² DE ÁREA



O diagrama de dispersão apresentado na Figura 21 indica que há correlação entre a precisão posicional e a frente da parcela, os dados distribuem-se formando uma parábola com concavidade voltada para baixo, sendo que a parcela com forma geométrica quadrangular admite

uma incerteza maior na determinação das coordenadas de seus vértices para que sua área se mantenha dentro dos limites exigidos na legislação. No meio rural a lei 10.267 estabelece uma precisão posicional de  $\pm 50\text{cm}$  para um imóvel rural com 2 ha de área, considerado a dimensão mínima dos imóveis rurais no Brasil.

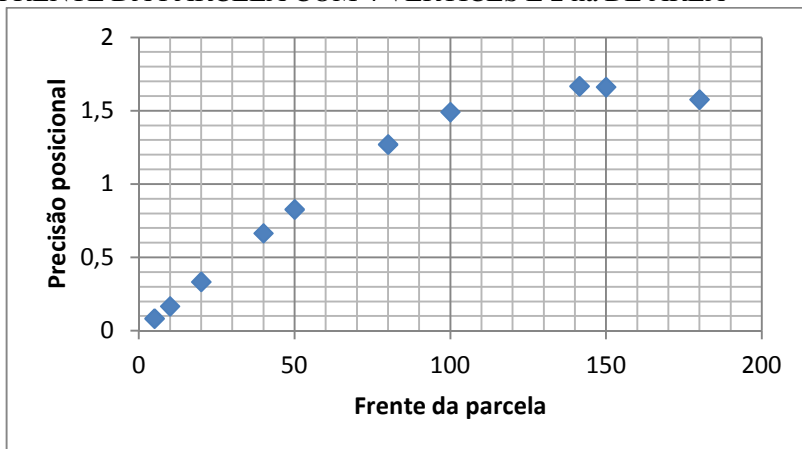
O Quadro 5 apresenta a simulação de dez casos com frente, fundos e precisão posicional para parcelas com 4 vértices e 2 ha (20000 m<sup>2</sup>) de área, onde a precisão posicional foi obtida através da lei de propagação dos erros.

**Quadro 5** - Simulação da precisão posicional em função da variação dos lados para parcelas com 4 vértices e 2 ha de área

Frente (m)	Fundos (m)	Precisão Posicional(m)
5	4000	0,083
10	2000	0,166
20	1000	0,333
40	500	0,664
50	400	0,826
80	250	1,269
100	200	1,490
141,43	141,43	1,666
150	133,34	1,660
180	111,12	1,575

Através dos dados obtidos nas simulações, a Figura 22 apresenta um diagrama de dispersão entre a precisão posicional e a frente das parcelas em estudo.

**Figura 22** - Diagrama de dispersão: PRECISÃO POSICIONAL x FRENTE DA PARCELA COM 4 VÉRTICES E 2 ha DE ÁREA



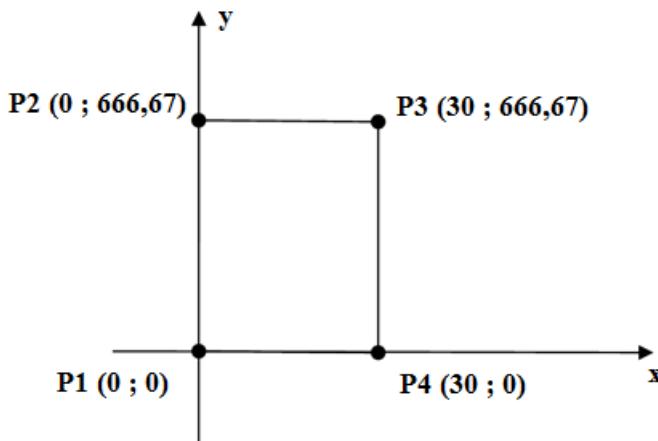
Observando o diagrama apresentado na Figura 22 pode-se concluir que o comportamento da precisão posicional em função da frente da parcela é semelhante ao meio urbano, onde a parcela com forma geométrica quadrangular admite uma incerteza maior na determinação das coordenadas dos vértices que a definem para que sua área se mantenha dentro dos limites exigidos na legislação.

O quadro 5 mostra que as parcelas com 5, 10 e 20 metros de frente exigem uma precisão posicional melhor do que a exigida na lei 10267, para parcelas com área de 2 há, porém quando aplicado a precisão de 50 cm aos vértices da parcela com frente de 5 metros, por exemplo, são obtidos para área máxima 24.006 m<sup>2</sup> e área mínima 15.996 m<sup>2</sup>, valores estes que não atendem ao código civil que determina um erro máximo de 5% (1000 m<sup>2</sup>) na determinação da área do imóvel.

O diagrama de dispersão apresentado na Figura 22 indica também que a precisão posicional de 50 cm é alcançada quando a frente da parcela é de aproximadamente 30 metros, a Figura 23 apresenta a representação gráfica de uma parcela com frente de 30 m e área de 20.000 m<sup>2</sup>.



**Figura 23:** Representação gráfica da parcela com frente de 30 metros e área de 20.000 m<sup>2</sup>



Aplicando a lei de propagação dos erros as coordenadas dos vértices que determinam os limites da parcela representada obtém-se para a precisão posicional o valor de 50 cm conforme indicado anteriormente, sendo que os valores para área máxima e área mínima obtidos são de 20.697,77 m<sup>2</sup> e 19.304,43 m<sup>2</sup> respectivamente, valores estes que atendem também o código civil.

É importante ressaltar que a discrepância da área, estabelecida no código civil, foi adotada em uma época onde o valor da terra era muito menor que nos dias atuais, Brandão (2003) ressalta:

Outros critérios para definir valores de tolerância posicional podem ser usados, mas não devem comprometer o que foi adotado por ser uma exigência legal. Assim devido à diversidade existente na ocupação do território brasileiro, em determinadas áreas podem-se exigir valores de tolerância posicional mais rigorosos, considerando o tamanho e forma geométrica das parcelas, o nível de exploração e potencial econômico, o valor da terra, etc.

Em Florianópolis, as regiões que possuem maior valor econômico são o centro da cidade e algumas praias como a de Jurerê Internacional, a

Avenida Jornalista Rubens de Arruda Ramos, também conhecida como Avenida Beira Mar Norte situada no centro de Florianópolis está entre as mais valorizadas.

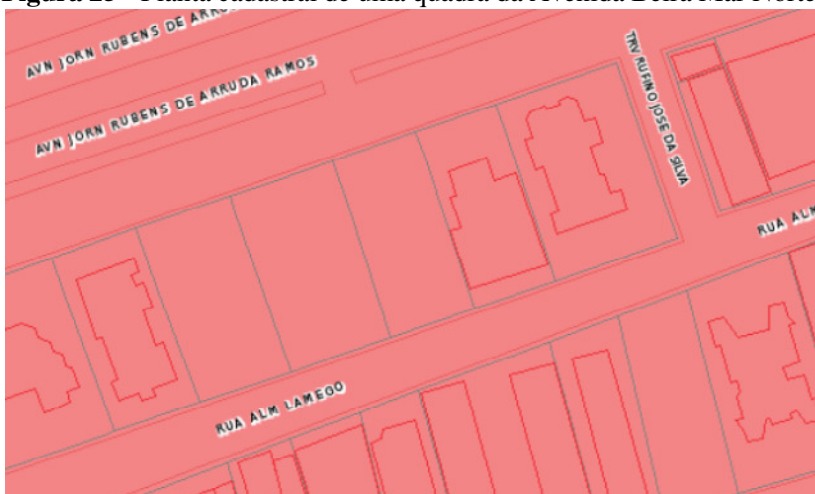
As Figuras 24 e 25 apresentam imagens de uma quadra na Avenida Beira Mar Norte

**Figura 24** - Vista aérea de uma quadra da Avenida Beira Mar Norte



Fonte: Google earth - Acesso: 15/08/2013

**Figura 25** - Planta cadastral de uma quadra da Avenida Beira Mar Norte

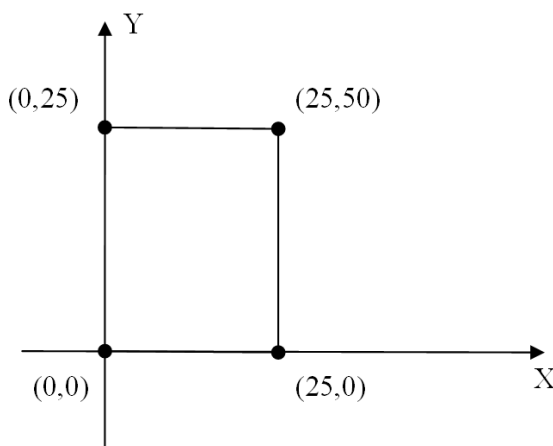


Fonte: Prefeitura Municipal de Florianópolis - Acesso 15/08/2003

Na Avenida Beira Mar Norte, predominam as construções residenciais, prédios cujos terrenos apresentam forma geométrica retangular e dimensões 25 m X 50 m totalizando 1.250 m<sup>2</sup>, em sua maioria.

A Figura 26 apresenta a representação gráfica de uma destas parcelas.

**Figura 26** - Representação Gráfica de um terreno na Avenida Beira Mar Norte



Segundo o Sindicato da Indústria da Construção Civil da Grande Florianópolis (SINDUSCON-Fpolis), o preço do metro quadrado residencial na Avenida Beira Mar Norte é de aproximadamente R\$5.717,00.

**Quadro 6** - Valores do m<sup>2</sup>, por bairros. Imóvel: Residencial multifamiliares

BAIRRO	Nº DE IMÓVEIS AVALIADOS	VALOR M <sup>2</sup>
AGRONÔMICA	128	R\$5.709,00
CAMPECHE	357	R\$4.064,00
CENTRO	511	R\$5.717,00
COQUEIROS	134	R\$3.737,00
ESTREITO	127	R\$3.489,00
INGLESES	185	R\$3.054,00
ITACORUBI	197	R\$4.706,00
JURERE INTER.	450	R\$6.479,00
TRINDADE	110	R\$4.790,00

Fonte: **SINDUSCON** / Fpolis - Período: Julho 2013.

Supondo uma precisão posicional de 1 cm e aplicando esta precisão aos vértices da parcela, obtém-se uma variação da área de aproximadamente  $1,5 \text{ m}^2$ , que em valores representa R\$ 8.575,50.

O exemplo apresentado torna clara a necessidade de critérios mais rigorosos para a determinação da precisão posicional dos vértices definidores dos limites dos imóveis em determinadas regiões.

## 5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 5.1 CONCLUSÕES

Após a discussão da legislação vigente no cadastro brasileiro e a lei de propagação dos erros, esta pesquisa propõe para parcelas com 125 m<sup>2</sup>, sendo 5 metros de frente no cadastro urbano uma precisão posicional de  $\sigma = \pm 8,0 \text{ cm}$  e tolerância posicional de  $3\sigma = \pm 24,0 \text{ cm}$  sendo que esta proposta apresenta uma confiança de mais de 99,7%.

### 5.2 RECOMENDAÇÕES

- a) Recomenda-se adotar a precisão posicional de 8 cm e tolerância de 24 cm para determinação posicional dos limites das parcelas urbanas;
- b) Estudo das precisões posicionais dos pontos da rede de referência cadastral considerando as precisões obtidas neste trabalho;
- c) Estudos para a determinação das precisões posicionais dos pontos limites das parcelas em função do valor comercial dos imóveis;
- d) Uma melhor avaliação da precisão posicional em função do número de vértices da parcela.
- e) Estudo das precisões dos métodos de levantamento cadastrais e equipamentos utilizados, considerando a precisão indicada nessa pesquisa.
- f) Criação de uma norma técnica para levantamentos cadastrais urbanos.



## REFERÊNCIAS

ALBERTAZZI JR. A.; SOUZA, A. R. - Fundamentos de Metrologia Científica e Industrial - Editora Manole, 2008.

ALBERTAZZI JR, A.; Metrologia - LABMETRO - Laboratório de Metrologia e Automatização - Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2002. Disponível em: <[http://www.labmetro.ufsc.br/Disciplinas/EMC6421/metrologia\\_1.pdf](http://www.labmetro.ufsc.br/Disciplinas/EMC6421/metrologia_1.pdf)> Acesso: 10/06/2013.

BRANDÃO, A. C.; O Princípio da Vizinhança Geodésica no Levantamento Cadastral. Tese de Doutorado. UFSC. Florianópolis. 2003.

BRASIL. Código Civil, Lei 10.406, 10 de janeiro de 2002, Estabelece criterios para compra e venda. Diponivel em: <<http://www.jusbrasil.com.br/topicos/10700524/artigo-500-da-lei-n-10406-de-10-de-janeiro-de-2002>> Acesso: 05/08/2013.

BRASIL. Lei n. 6.766, de 19/12/1979. Dispõe sobre o parcelamento do solo urbano e dá outras providências. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/L6766.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L6766.htm)>. Acesso em 13/07/2012.

BRASIL. Lei 10.267, de 28 de agosto de 2001. Altera dispositivos das Leis nos 4.947, de 6 de abril de 1966, 5.868, de 12 de dezembro de 1972, 6.015, de 31 de dezembro de 1973, 6.739, de 5 de dezembro de 1979, 9.393, de 19 de dezembro de 1996, e dá outras providências. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/leis\\_2001/110267.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/leis_2001/110267.htm)> Acesso: 15/07/2012.

CABRAL C. R.; FRANÇA R. M.; HASENAK M. - Teoria dos Erros - CEFET/SC - 2003.

CORDINI, J.; Teoria dos erros e Ajustamento de observações - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - UFSC. Disponível em <[http://www.topografia.ufsc.br/Disc\\_Erros.html](http://www.topografia.ufsc.br/Disc_Erros.html)> Acesso: 25/10/2012.

CREMONA, G.; GALDINO, C.; A Influência da Propagação do Erro Posicional no Cálculo de Áreas de Parcelas Territoriais. XXI Congresso Brasileiro de Cartografia, Belo Horizonte, Brasil, 2003.

JOHNSON, R. A., "Miller and Freund's Probability and Statistics for Engineers", Ed. Prentice-Hall International, Fifth Edition, 1994.

FIG. *Statement on the Cadastre*. International Federation of Surveyors, FIG Bureau, Canberra, Australia. 1995.

FURRIEL, L.; Física Análise Dimensional, Sistema Internacional de Unidades (SI), Teoria dos Erros - Universidade Tecnológica do Paraná - Campus Medianeira - 2010. Disponível em: <<http://followscience.com/content/465779/sistema-de-unidades-teoria-dos-erros-e-analise-dimENSIONAL>> Acesso: 12/04/2003.

GALDINO, C. Cadastro de parcelas territoriais vinculado ao sistema de referência geocêntrico - SIRGAS 2000. Tese de Doutorado. UFSC. Florianópolis. 2006.

GALLAS M. R. ; Incerteza de Medição, IF-UFRGS - 2010. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/~marcia/medidas.pdf>> Acesso: 25/02/2013.

GIL, A.C. Como elaborar projetos de pesquisa. 3º. Ed. São Paulo, Atlas, 1996.

INCRA. Norma técnica para georreferenciamento de imóveis rurais. 2ª edição revisada. Ministério do Desenvolvimento Agrário. 2010.

INCRA - Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária. Portaria nº 954, de 13/11/2002. Estabelece a precisão posicional. Disponível em: <<http://www.incra.gov.br/index.php/institucional/legislacao/-/atos-internos/portarias/file/63-portaria-n-954-de-13112002>> Acesso: 12/05/2013.

LOCH, C.; Cadastro técnico multifinalitário e gestão territorial. Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia - Cobenge - PUCRS - Porto Alegre/RS 2001. Disponível em <<http://www.pp.ufu.br/Cobenge2001/trabalhos/EMA023.pdf>> Acesso: 15/06/2013.



LOCH, C.; Visão da Academia sobre mapeamento cadastral no Brasil. Secretaria de Planejamentos e Investimentos do Ministério do Planejamento - Infraestrutura Nacional de Dados Espaciais – INDE. Jornada INDE Academia - Brasília 2012. Disponível em: <<http://www.inde.gov.br/wp-content/uploads/2012/10/Visao-da-Academia-sobre-mapeamento-cadastral-no-Brasil-UFSC-SET.pdf>> Acesso: 12/06/2013.

LOCH, C.; A Realidade do Cadastro Técnico Multifinalitário no Brasil. - Anais XIII Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, Florianópolis, Brasil, 21-26 abril 2007, INPE, p. 1281-1288. Disponível em: <<http://marte.sid.inpe.br/col/dpi.inpe.br/sbsr%4080/2006/11.14.18.04.51/doc/5357-5364.pdf>> Acesso: 10/04/2013.

MATTAR, F. N. Pesquisa de marketing: metodologia, planejamento. Vol. 1. 5. ed. São Paulo, Atlas, 1999.

MATTAR, F. N. Pesquisa de marketing: metodologia, planejamento. Vol. 1. 6. ed. São Paulo, Atlas, 2005.

MIYASHITA, P. M. Avaliação de uma metodologia de baixo custo para o cadastro de propriedades em área de expansão e vazios urbanos. Dissertação de mestrado. UNESP. Presidente prudente. 2008.

NBR 13133. Execução de levantamento topográfico. Rio de Janeiro: ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas, mai. 1994.

NBR 14166. Rede de Referência Cadastral Municipal. Rio de Janeiro: ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas, ago. 1998.

NETO L. E. P. Parcelamento do solo. CEFET/SC - 2008.

TABACNIKS, M. H. Conceitos Básicos da Teoria de Erros – USP, 2003. Disponível em: <[http://fap.if.usp.br/~tabacnik/tutoriais/tabacniks\\_concbasteorerr\\_rev2007.pdf](http://fap.if.usp.br/~tabacnik/tutoriais/tabacniks_concbasteorerr_rev2007.pdf)> Acesso: 10/11/2012.

VEIGA, L. A. K.; ZANETTI, M. A. Z.; FAGGION, P. L. FUNDAMENTOS DE TOPOGRAFIA - Engenharia Cartográfica e de Agrimensura - Universidade Federal do Paraná. 2012. Disponível em:

<http://www.yumpu.com/pt/document/view/14156851/fundamentos-de-topografia-engenharia-cartografica> . Acesso em: 18/05/2013.

VOLPI, M. E.; Ajustamento das Observações em Geodésia - Pós-graduação em Geoprocessamento para Gestão Urbana e cadastramento Rural - UNILINS, 2007. Disponível em: [ftp://ftp.unilins.edu.br/geopro\\_t2/aula\\_24\\_11%20prof%20Edimilson/Apostila%20-%20Ajustamento%20de%20Observa\\_es.pdf](ftp://ftp.unilins.edu.br/geopro_t2/aula_24_11%20prof%20Edimilson/Apostila%20-%20Ajustamento%20de%20Observa_es.pdf)  
Acesso: 15/07/2013.

Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia (VIM) - Portaria Inmetro nº 029 de 10 março de 1995 - Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial - INMETRO. Disponível em: <http://www.labmetro.ufsc.br/Disciplinas/EMC6421/vim.zip>> Acesso: 15/07/2013

VUOLO, J. H. Fundamentos da Teoria de Erros – 2ª Edição – Edgard Blücher Ltda – (1996).

XEREZ, C. Topografia Geral – Topografia, Fotogrametria, Elementos de Geodésia e Astronomia. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 1947.